

AperTO - Archivio Istituzionale Open Access dell'Università di Torino

## Il trattato Genocchi-Peano (1884) alla luce di documenti inediti

### This is the author's manuscript

*Original Citation:*

*Availability:*

This version is available <http://hdl.handle.net/2318/75951> since 2017-11-28T18:23:51Z

*Terms of use:*

#### Open Access

Anyone can freely access the full text of works made available as "Open Access". Works made available under a Creative Commons license can be used according to the terms and conditions of said license. Use of all other works requires consent of the right holder (author or publisher) if not exempted from copyright protection by the applicable law.

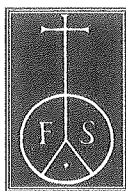
(Article begins on next page)

# BOLLETTINO DI STORIA DELLE SCIENZE MATEMATICHE

---

*Anno XXVII · Numero 2 · Dicembre 2007*

ESTRATTO



PISA · ROMA  
FABRIZIO SERRA · EDITORE  
MMVII

## SOMMARIO

SANDRO CAPARRINI, <i>Il calcolo vettoriale di Domenico Chelini (1802-1878)</i>	197
ERIKA LUCIANO, <i>Il trattato Genocchi - Peano (1884) alla luce di documenti inediti</i>	219
ROSHDI RASHED, <i>Lire les anciens textes mathématiques. Le cinquième livre des Coniques d'Apollonius</i>	265
ELISABETTA ULIVI, <i>Ancora su Benedetto da Firenze</i>	289
RAFFAELLA FRANCI, <i>Trattatistica d'abaco e numismatica. Un caso esemplare: il trattato del senese Tommaso della Gazzaja. Ms. C. III. 23 della Biblioteca Comunale degl'Intronati di Siena</i>	315

# IL TRATTATO GENOCCHI-PEANO (1884) ALLA LUCE DI DOCUMENTI INEDITI

ERIKA LUCIANO\*

ABSTRACT · This paper presents the contents, the scientific progress and the differences with respect to Genocchi's lectures and the debates that surrounded the writing of the *Genocchi-Peano* treatise (1884). The study of the correspondence between Genocchi and his contemporaries sheds light on the context of the publication of the volume (Genocchi at first refused to put his name on it) and how Genocchi's behaviour changed after comments were received from abroad. An examination of three manuscript versions of Genocchi's unpublished lectures,

conserved in the archives of Piacenza and Torino, shows the extent of the influence exerted on Peano by his master, the differences between the teachings of the two mathematicians, and the accurate studies by Peano of the most important treatises of his time. Thanks to the *margin-alia*, noted by Peano on his copy, it is possible to follow the development of the research undertaken by Peano in the years 1884-1899, when the German version was published, and the progression to the logical notations in his research and teaching in the field of analysis.

**G**RAZIE allo studio di fonti archivistiche edite e inedite, reperite nelle biblioteche di Cuneo, Torino, Genova, Piacenza, Parma e Napoli, sono emersi alcuni elementi di novità e di interesse concernenti il contesto, le fasi di elaborazione, i retroscena e i dibattiti che accompagnarono la stesura e l'uscita del *Genocchi-Peano*.<sup>1</sup> In particolare, il carteggio ine-

\* Ricerca eseguita nell'ambito del Progetto MIUR, Storia delle Matematiche, Unità di Torino. Erika Luciano, Dipartimento di Matematica, Università di Torino, Via Carlo Alberto 10, I 10123, Torino. E-mail: erika.luciano@unito.it

<sup>1</sup> Per le fonti d'archivio si utilizzano le seguenti abbreviazioni: ADT, Archivio Privato del Prof. M.U. Dianzani, Torino; AFT, Archivio Storico, Istituto Francesco Faà di Bruno, Biblioteca dell'Istituto del Suffragio, Torino; ASUT, Archivio Storico dell'Università di Torino; BCC, Biblioteca Civica di Cuneo; BCT, Biblioteca Civica di Torino; BNT, Biblioteca Nazionale di Torino; BUG, Cassetta Loria, Biblioteca Universitaria di Genova; FCP, Fondo Cassina, Biblioteca del Dipartimento di Matematica dell'Università di Parma; FGP, Fondo Genocchi, Biblioteca Passerini-Landi, Piacenza; FSN, Fondo Siacchi, Biblioteca del Dipartimento di Matematica dell'Università di Napoli. Per gli scritti di Peano si utilizzano le sigle riportate nel cd-rom *L'Opera Omnia di Giuseppe Peano*, indicato in Bibliografia come PEANO 2002 e consultabile nel sito [www.dm.unito.it/collana-cdrom/operaomnia/scritti.pdf](http://www.dm.unito.it/collana-cdrom/operaomnia/scritti.pdf).

dito fra Angelo Genocchi e Placido Tardy consente di illustrare i rapporti di stima che legarono Genocchi e Peano, solo temporaneamente e superficialmente incrinati dalla vicenda legata alla comparsa del trattato di Calcolo differenziale, con la conseguente dichiarazione di estraneità all'opera da parte di Genocchi. Il raffronto fra i manoscritti delle *Lezioni* di Calcolo differenziale ed integrale dettate da Genocchi all'Università di Torino e il testo a stampa permette invece di valutare l'impronta dell'insegnamento di analisi di Genocchi sulla formazione del giovane Peano e di stabilire in che misura e in che senso quest'ultimo recepì, utilizzò e modificò le lezioni del maestro. Infine, lo studio dei *marginalia* apposti da Peano sulla sua copia del *Genocchi-Peano* rende possibile ripercorrere, anche attraverso le edizioni successive, gli sviluppi che questo trattato ebbe nella ricerca e nella didattica di Peano nel campo dell'analisi.

# 1. IL CONTESTO INTERNAZIONALE E L'AMBIENTE TORINESE

Quando nel settembre del 1884 è pubblicato a Torino, presso l'editore Bocca, il trattato di Angelo Genocchi *Calcolo differenziale e principii di calcolo integrale pubblicato con aggiunte dal D.<sup>r</sup> Giuseppe Peano*<sup>1</sup> la capitale sabauda sta vivendo un periodo di indiscutibile vivacità dal punto di vista culturale e scientifico. Nell'ambito dell'ateneo operano docenti di spicco fra cui, oltre a Genocchi, Enrico D'Ovidio, Francesco Siacci e Francesco Faà di Bruno; nel 1883 è stata inaugurata la Biblioteca Speciale di Matematica e, nello stesso tempo, alcune case editrici, fra cui quella dei Fratelli Bocca avviano collane destinate alla matematica e alle scienze.

Il panorama della ricerca scientifica internazionale in cui si inserisce la pubblicazione di questo trattato si configura come una fase di transizione verso la moderna analisi, contraddistinta da una stretta interazione fra attività di ricerca e di insegnamento: un'epoca in cui i docenti erano «chiamati ad insegnare ciò che essi medesimi giorno per giorno studiavano e scoprivano»<sup>2</sup> e in cui gli allievi non si limitavano ad assistere passivamente alla creazione di nuove teorie, ma erano essi stessi invitati a collaborare con osservazioni e contributi originali. La didattica e la ricerca viva nel campo dell'analisi si alimentano ed arricchiscono vicendevolmente, e il frutto degli studi sui fondamenti del Calcolo si traduce

<sup>1</sup> ANGELO GENOCCHI, *Calcolo differenziale e principii di calcolo integrale pubblicato con aggiunte dal D.<sup>r</sup> Giuseppe Peano*, Torino, Bocca, 1884. Nel seguito tale trattato sarà citato in nota come PEANO 1884c.

<sup>2</sup> VITO VOLTERRA, *Le matematiche in Italia nella seconda metà del secolo XIX*, Atti del IV Congresso Internazionale dei Matematici (Roma, 6-11 aprile 1908), Roma, Tip. della R. Accademia dei Lincei, vol. I, 1909, p. 58.

nella produzione di una manualistica di alto livello, ai cui vertici si distinguono le lezioni di Ulisse Dini e il *Genocchi-Peano*, testi che portano l'Italia all'avanguardia nell'insegnamento dell'analisi a livello europeo. Il *Genocchi-Peano* viene così a rappresentare una tappa fondamentale e un riflesso di quella stagione della matematica, a ragione caratterizzata da Beppo Levi come il «periodo eroico della teoria delle funzioni di variabili reali»,<sup>1</sup> di cui Peano diventerà, a breve, brillante protagonista.

Nel contempo, emergono e vanno delineandosi, con sempre maggiore chiarezza, tre scuole di ricerca impersonate da Vito Volterra nelle figure di Enrico Betti, Francesco Brioschi e Felice Casorati che, pur con mutue interazioni, propugnano le istanze dell'analisi pura, di quella applicata e dell'analisi intesa come studio critico, volto a portare rigore e precisione in teorie già assodate.<sup>2</sup> È soprattutto la figura del matematico pavese a fornire il metro di paragone con cui contestualizzare i primi lavori di Peano nel campo dell'analisi<sup>3</sup> e, non a caso, sarà proprio Casorati, con cui Peano è in contatto a partire dal novembre 1883, a risultare uno dei mentori del *Genocchi-Peano* a livello nazionale, suggerendone la lettura e l'acquisto da parte dei suoi studenti all'Università di Pavia.<sup>4</sup>

Se l'insegnamento di Casorati privilegia il legame fra la docenza del Calcolo infinitesimale e delle sue applicazioni, utili a coloro che avrebbero operato nelle Scuole di applicazione per ingegneri,<sup>5</sup> l'insegnamento impartito da Genocchi all'Università di Torino si contraddistingue per il taglio maggiormente orientato ai temi dell'analisi astratta.

Formatosi da autodidatta, alla scuola di Giovanni Plana e di Felice Chiò, Genocchi è un valente analista, la cui produzione spazia dalla teo-

<sup>1</sup> LEVI 1932, p. 256 e 1955, p. 13.

<sup>2</sup> VITO VOLTERRA, *Betti, Brioschi, Casorati, trois analystes italiens et trois manières d'envisager les questions d'analyse*, in *Compte rendu du deuxième Congrès international des mathématiciens*, Paris, 1900; Paris, Colin, 1902, pp. 43-57.

<sup>3</sup> VITO VOLTERRA, *Betti, Brioschi, Casorati*, cit., 1902, pp. 46-47: «L'esprit de Casorati était d'une nature différente: il vécut et travailla presque exclusivement pur ses élèves et pour son école. Ses travaux en effet ont presque tous ce cachet spécial qui révèle que le but de l'auteur était d'éclaircir quelque point obscur, ou de corriger quelque résultat, ou d'exposer d'une manière critique un corps de doctrines. Mais quelle originalité dans la critique, quel talent dans l'exposition d'une théorie, qui devenait une nouvelle théorie en vertu du point de vue d'où Casorati l'envisageait, combien de résultats nouveaux et complètement inattendus ressortaient d'une simple erreur qu'il corrigeait!»

<sup>4</sup> F. Casorati a G. Peano, Pavia 6.11.1883, G. Peano a F. Casorati, Torino 13.11.1883 e F. Casorati a G. Peano, Pavia 2.12.1883 in GABBA 1957, pp. 877-878.

<sup>5</sup> FELICE CASORATI, *Discorso pronunciato il 17 Gennaio 1864*, Prolusione al corso di *Calcolo differenziale ed integrale*, Università di Pavia, riedito in ANTONIO CAPELO, MARIO FERRARI, ALBERTO GABBA, P. MOGLIA, *Un discorso di Felice Casorati sull'analisi matematica del suo tempo*, «L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate», 20B, 1997, pp. 209-266, cfr. in particolare p. 240.

ria delle serie – in particolare i numeri di Bernoulli, l'espressione del resto nella serie di Euler sotto forma di integrale definito, la serie di Lagrange, gli sviluppi in serie di Stirling, di Binet e di Prym – fino agli studi riguardanti le funzioni interpolari, ellittiche e gli integrali euleriani, un soggetto che rivela in lui «un seriissimo istinto di maestro associato a quello di ricercatore».<sup>1</sup> Approdato all'insegnamento universitario nel 1857, Genocchi tiene dapprima il corso di Algebra complementare e Geometria analitica, nel 1861 diviene titolare dell'insegnamento di Analisi Superiore, passando poi nel 1862 alla cattedra di Introduzione al Calcolo<sup>2</sup> e successivamente, nel 1865, a quella di Calcolo differenziale ed integrale, denominato a partire dal 1876 Calcolo infinitesimale, su cui rimane fino alla morte.

Sia sotto il profilo contenutistico, sia a livello espositivo, l'insegnamento di Genocchi presenta importanti innovazioni. Mosso dalla convinzione, che gli aveva fruttato un richiamo ufficiale nel 1858,<sup>3</sup> che il livello dell'insegnamento della matematica in Italia non potesse che abbassarsi se si ponevano «nelle mani dei giovani elementi molto leggieri, i quali compariscono facili perché sono inesatti»,<sup>4</sup> Genocchi impartiva lezioni che si distinguevano per chiarezza, precisione e rigore delle trattazioni. D'altro canto egli mirava a introdurre le conquiste della moderna critica analitica, con il commento ai lavori di Augustin-Louis Cauchy e di Felice Chiò<sup>5</sup> e amava fare oggetto di insegnamento teorie analitiche su

<sup>1</sup> ENRICO D'OVIDIO, *Onoranze ad A. Genocchi*, «Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, Classe di Scienze FMN», 27, 1892, pp. 1088-1106 citazione a p. 1101. Sulla figura e l'opera scientifica di Genocchi cfr. anche FRANCESCO STACCI, *Cenni necrologici di Angelo Genocchi*, «Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino», 39, 1889, pp. 463-496; GIUSEPPE PEANO, *Angelo Genocchi*, 1890a, pp. 195-202; CONTE, GIACARDI 1991 e LIVIA GIACARDI, *Angelo Genocchi*, in ROERO 1999, t. II, pp. 461-467.

<sup>2</sup> Il corso di Introduzione al Calcolo è previsto come insegnamento obbligatorio dal *Regolamento della Facoltà di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali* del 13 novembre 1859 (Legge Casati). In ASUT, XIVB, è conservato il *Programma per gli esami d'introduzione al calcolo proposto a norma dell'art. 130 della Legge del 13 novembre 1859 dalla Commissione creata dal Ministero della Pubblica Istruzione, ed approvato dal Consiglio Superiore*, redatto da E. Martini e pubblicato a Torino, presso la Stamperia Reale nel 1861. Il corso di Introduzione al calcolo è poi accorpato a quello di Calcolo differenziale ed integrale nel Decreto Matteucci (settembre 1862). Come si evince dai *Registri* delle sue lezioni, Genocchi continuerà tuttavia ad operare ufficiosamente una suddivisione del corso da lui tenuto in due parti distinte: un primo gruppo di una quindicina di lezioni, dedicate appunto all'Introduzione al calcolo, tenute dall'assistente, cui segue il corso 'vero e proprio' di Calcolo differenziale ed integrale, svolto interamente dal professore.

<sup>3</sup> Cfr. ANGELO GENOCCHI, *Notizie intorno alla vita ed agli scritti di Felice Chiò*, «Bullettino di Bibliografia e Storia delle Scienze Matematiche e Fisiche (Boncompagni)», 4, 1871, pp. 375-376.

<sup>4</sup> PIETRO PAOLI, *Elementi di Algebra*, vol. I, Torino, Stamperia Reale, 2ª ed., 1799, p. 1.

<sup>5</sup> Secondo la testimonianza di D'Ovidio (ENRICO D'OVIDIO, *Onoranze ad A. Genocchi*, cit., 1892, p. 1099), Genocchi ben conosceva ed ammirava anche i risultati ed i metodi di B. Riemann e di K. Weierstrass, pur non adoperandoli come strumenti di ricerca.

cui lavorava egli stesso come ricercatore: significativa, in tal senso, risulta l'esposizione di argomenti quali la teoria delle funzioni interpolari e le funzioni prive di derivata, all'epoca al centro della ricerca, illustrate sia nell'ambito delle lezioni accademiche, sia nel contesto delle conferenze alla Scuola di Magistero in Matematica.<sup>1</sup>

Apprezzato per le sue doti scientifiche e umane, «più che amato, venerato dagli studenti»,<sup>2</sup> nella sua decennale carriera di docente Genocchi ha, fra i suoi più eccellenti allievi, oltre a Peano, anche il geometra algebrico Corrado Segre e l'economista Vilfredo Pareto, che segue il corso di Calcolo tenuto da Genocchi nell'anno accademico 1865-66.<sup>3</sup>

Il matematico piacentino contribuirà, con il suo insegnamento, a creare a Torino un ambiente aperto e recettivo in cui – dopo il definitivo consolidamento delle teorie di Cauchy e grazie all'acquisizione dei moderni studi di aritmetizzazione dell'analisi ad opera di K. Weierstrass, G. Cantor, E. Heine, R. Dedekind e C. Méray – potrà dispiegarsi l'opera creativa di Peano.

## 2. I RAPPORTI FRA GENOCCHI E PEANO

### ALLA LUCE DEL CARTEGGIO FRA GENOCCHI E TARDY

Iscrittosi al corso di laurea in Matematica dell'Università di Torino nel 1876, il giovane Peano si fa da subito apprezzare come uno studente di promettente talento da tutti i suoi maestri.<sup>4</sup> Fra questi vi sono eminenti matematici – come Enrico D'Ovidio, Francesco Faà di Bruno, Angelo Genocchi e Francesco Siacchi – che, attirati dalla politica illuminata di casa Savoia e di Cavour, si erano trasferiti a Torino negli anni a ridosso dell'unità d'Italia per contribuire al risorgimento nazionale e alla ripresa culturale: saranno loro ad esercitare su Peano la più forte influenza e ad orientarlo verso la ricerca.

Personalità dal forte carisma, E. D'Ovidio è professore di Peano nel corso di Algebra Complementare e Geometria Analitica ed è relatore della sua tesi di laurea. Consapevole delle capacità non comuni del giovane Peano, gli offre il posto di assistente nella Scuola da lui diretta<sup>5</sup> e lo indirizza nelle prime ricerche, incentrate sui connessi e sulla teoria delle

<sup>1</sup> Cfr. GIUSEPPE PEANO, *Angelo Genocchi*, 1890a, pp. 197, 199.

<sup>2</sup> ENRICO D'OIDIO, GIUSEPPE PEANO, *Angelo Genocchi*, «La Letteratura», quotidiano apparso a Torino il 1.4.1889, pagina non numerata.

<sup>3</sup> Cfr. LUIGI PEPE, *La formazione matematica di Vilfredo Pareto*, «Revue Européenne des Sciences Sociales», XXXVII, 1994, n. 116, pp. 173-189.

<sup>4</sup> Sugli anni della formazione universitaria di Peano cfr. CLARA SILVIA ROERO, *Giuseppe Peano, geniale matematico, amorevole maestro*, in ALLIO 2004, pp. 138-140.

<sup>5</sup> Cfr. ASUT XIV B, 30.10.1880.



forme multiple e binarie, presentando all'Accademia delle Scienze di Torino le sue prime note.<sup>1</sup>

Seguendo nel 1878 il corso di Analisi superiore, Peano ha inoltre la possibilità di apprezzare la radicale opera di innovazione apportata da F. Faà di Bruno che, animato dal desiderio di creare una tradizione di studi algebrici e analitici in grado di competere con le sedi europee della ricerca avanzata, rivede radicalmente i contenuti del corso, incrementando il peso della trattazione dell'algebra lineare e dedicando ampio spazio all'esposizione della teoria delle forme binarie, degli invarianti e dei covarianti. L'eredità dell'insegnamento di Faà di Bruno sul giovane Peano è destinata ad emergere, oltre che nella comune propensione alla trattatistica, in tre suoi lavori giovanili sulle forme binarie,<sup>2</sup> fortemente apprezzati da G. Battaglini.<sup>3</sup> Per quanto concerne infine il corso di Calcolo differenziale ed integrale, da cui trarrà origine il *Genocchi - Peano*, esso era affidato a Genocchi, era obbligatorio per il *curriculum* del secondo anno<sup>4</sup> e, come si desume dal programma ufficiale redatto da Genocchi nel 1870, prevedeva la trattazione di 16 tesi di Calcolo differenziale e di 15 tesi di Calcolo integrale, oltre a comprendere le Applicazioni geometriche del calcolo infinitesimale, il cui insegnamento era però affidato all'assistente Eligio Martini.

Il 27 ottobre del 1880, a poco più di tre mesi dalla laurea conseguita con il massimo dei voti, Peano è assunto come assistente provvisorio presso la Scuola di Algebra complementare e Geometria analitica diretta da d'Ovidio,<sup>5</sup> un incarico che tiene fino al 16 giugno del 1881, quando è chiamato d'urgenza a sostituire E. Martini nella commissione d'esame di Calcolo infinitesimale. Quest'ultimo aveva infatti deciso di non prender parte agli esami a causa delle agitazioni studentesche che avevano gravemente disturbato il suo insegnamento nel corso dell'an-

<sup>1</sup> Cfr. GIUSEPPE PEANO, *Costruzione dei connessi (1,2) e (2,2)*, 1880a; *Un teorema sulle forme multiple*, 1881a; *Sui sistemi di forme binarie di egual grado e sistema completo di quante si vogliano cubiche*, 1881b.

<sup>2</sup> GIUSEPPE PEANO, cit., 1881a; cit., 1881b; GIUSEPPE PEANO, *Formazioni invariantive delle corrispondenze*, 1882a.

<sup>3</sup> Cfr. *Relazione sul concorso al posto di professore straordinario di calcolo infinitesimale nella R. Università di Modena*, «Bollettino ufficiale dell'Istruzione», XI, 11.10.1885, p. 40.

<sup>4</sup> In base al *Programma per gli esami speciali di Algebra complementare e di Geometria analitica*, Torino, Stamperia Reale, 1873 gli studenti acquisivano infatti i primi rudimenti di analisi nell'ambito del corso tenuto da D'Ovidio. Quest'ultimo doveva illustrare a lezione, ad esempio, i seguenti argomenti: la classificazione delle funzioni, la continuità, le derivate, il teorema di esistenza degli zeri, la formula di Taylor per il caso di funzioni razionali intere, la continuità delle funzioni razionali intere, le derivate di funzioni razionali intere, lo studio del segno di una funzione, i primi elementi della teoria delle differenze e la formula di interpolazione di Newton.

<sup>5</sup> Cfr. ASUT, XIV B, *Disposizioni relative al personale insegnante, Preside, Prof. ordinari, straordinari, incaricati e supplenti*, 27.10.1880, 30.10.1880.

no e a nulla erano valsi i tentativi di Genocchi di distoglierlo dalla sua decisione.<sup>1</sup>

Messo nella necessità di completare repentinamente la commissione d'esame, Genocchi si rivolge al Rettore, che convoca Peano. Per il giovane matematico si tratta del primo contatto con il matematico piacentino. Nell'ottobre del 1881, in seguito al ritiro dall'insegnamento di Martini, Peano gli subentrerà definitivamente in qualità di assistente. A partire da questa data, Genocchi è afflitto da una lunga serie di malattie, fra cui la progressiva cecità, che lo portano a diradare ed infine ad interrompere la sua attività di ricercatore e di docente.

I rapporti fra allievo e maestro sono da subito improntati ad un'indiscutibile stima reciproca. Genocchi elogia il suo giovane assistente sia dal punto di vista dell'attività di ricerca, che sotto il profilo dell'insegnamento. Comunica ad esempio i lavori di Peano, talvolta inviandone anche gli estratti, a H. Schwarz, C. Hermite e G. F. Monteverde,<sup>2</sup> e non esita, insieme a D'Ovidio, a supportarlo fin dal 1882 dal punto di vista accademico, proponendo per lui un aumento del salario.<sup>3</sup> Impossibilitato a proseguire le sue lezioni per una caduta, Genocchi sospende il suo insegnamento nell'aprile del 1882, affidando la prosecuzione del corso di Calcolo e la gestione degli esami a Peano,<sup>4</sup> che nel maggio dello stesso

<sup>1</sup> Cfr. ASUT, XIV B, 74, *Disposizioni relative al personale insegnante, Preside, Prof.<sup>i</sup> ordinari, straordinari, incaricati e supplenti, E. Martini*, 17.5.1881, 23.5.1881, 25.5.1881, 16.6.1881, 30.6.1881, 4.7.1881, 14.7.1881, 18.7.1881, 25.10.1881; FGP, ms. TT, *Copia di lettera del Sig. Prof. Martini*, 30.9.1881; ASUT, XIV B, 77bis, *Disposizioni relative al personale inseg.<sup>te</sup>, Preside, Professori ordinari, straordinari, incaricati e supplenti*, 28.10.1881, 28.11.1881; FGP, ms. T'T, *Conferma del Dottore Giuseppe Peano ad Assistente provvisorio*, 14.7.1882; FGP, ms. TT, *Conferma di incarico*, 27.9.1884.

<sup>2</sup> Cfr. A. Genocchi a H. Schwarz, Torino 26.5.1882, in H. SCHWARZ, *Gesammelte Mathematische Abhandlungen*, 2, Berlin, Springer, 1890, p. 369; C. Hermite a A. Genocchi, Flanville par Metz 22.9.1882, Paris 16.10.1882 in CASSINA 1950, p. 322 e MICHELACCI 2005, pp. 101, 104, G. F. Monteverde a A. Genocchi, Genova 25.10.1886, FGP, ms. QQ, c. 1r: «Ricevetti l'interessante nota del chiaris.<sup>mo</sup> D.<sup>e</sup> Peano, che acquista ai miei occhi maggior pregio in quanto che mi viene da Lei.»

<sup>3</sup> Cfr. ASUT XIV B, 77bis, *Disposizioni relative al personale inseg.<sup>te</sup>, Preside, Professori ordinari, straordinari, incaricati e supplenti*, 21.5.1882, 25.5.1882; ASUT XIV B, 83, *Disposizioni relative al personale insegnante, Preside, Professori ordinari, straordinari, incaricati e supplenti*, 14.6.1884; E. d'Ovidio a A. Genocchi, [Torino] 4.6.1883, FGP, ms. I, cc. 1r-2r; E. D'Ovidio a A. Genocchi, [Torino] 17.4.1884, FGP, ms. I, c. 1r. Cfr. anche G. Peano ad A. Genocchi, Torino 14.7.1882, FGP, ms. G2, c. 1r: «Ricevetti ieri sera un avviso della Rettoreria dove mi si fissa lo stipendio per l'anno scorso. Io la ringrazio vivissimamente della proposta che Elle fece; perché non mi aspettavo tanto; procurerò quindi d'ora innanzi di fare tutto per meritarmi ognor più la sua stima.»

<sup>4</sup> Genocchi interrompe le sue lezioni il 22.4.1882, per riprenderle l'11.3.1884. Cfr. A. Genocchi a P. Tardy, Torino 21.5.1882, BUG, busta 12/73, c. 1r: «Ho sospeso per ciò le mie lezioni facendomi supplire dal mio assistente D.<sup>e</sup> Peano che è veramente un bravo giovine e di cui avrete veduto qualche lavoro negli Atti dell'Accademia.»; A. Genocchi a P. Tardy, Torino 20.10.1883, BUG, busta 12/82, c. 1r: «Lunedì prossimo all'Università cominceranno gli esami affidati alla Commissione a cui appartengo ma io non vi assisterò e spero di poter riprendere nel nuovo anno scolastico il corso delle mie lezioni.»

anno illustra a lezione la sua osservazione sull'erroneità della definizione di area secondo Serret, elaborata indipendentemente ed in contemporanea a H. Schwarz. Sempre a causa delle cattive condizioni di salute, pur essendo Socio dell'Accademia delle Scienze di Torino, non sarà Genocchi a presentare i primi lavori analitici di Peano, la cui lettura è affidata a E. D'Ovidio e a F. Siacchi.

Nel giugno del 1883 il direttore della casa editrice Bocca, Lerda, desiderando inaugurare la nuova collana «Biblioteca Matematica» con la pubblicazione del corso di Calcolo tenuto da Genocchi, si rivolge a Peano, sollecitandolo ad agire come intermediario.<sup>1</sup> Genocchi accorda prontamente e senza riserve il permesso a pubblicare le sue lezioni e la stesura del trattato dovrebbe essere completata nelle vacanze estive del 1883. Nel novembre di quell'anno alcuni fascicoli del *Genocchi - Peano* sono già stampati e tuttavia, nei mesi intercorsi, il matematico piacentino ha continuato a mantenersi estraneo alla compilazione del trattato, lasciando cadere inascoltati gli inviti di Tardy, che lo pregava di non far mancare al giovane assistente aiuto e consigli.<sup>2</sup> Nonostante le reiterate richieste di Peano a rivedere il manoscritto o almeno le bozze di stampa, Genocchi ha infatti preferito disinteressarsene, come egli stesso confessa a Tardy:

Il mio assistente D<sup>r</sup> Peano indotto dal Libraio Bocca si è messo a far stampare un Corso di calcolo differenziale e integrale ch'egli stesso viene compilando sulla traccia delle mie lezioni orali degli anni scorsi. Egli mi aveva pregato di rivedere il manoscritto o almeno le bozze di stampa ma io non ho voluto saperne temendo di avermi troppo a seccare, e così la compilazione rimane tutta sua e sotto la sua responsabilità.<sup>3</sup>

Nel marzo del 1884, a stampa del volume ormai avanzata,<sup>4</sup> i rapporti fra Genocchi e Peano sono ancora ottimi, come si evince dai retroscena della polemica intercorsa fra Philippe Gilbert e Peano.<sup>5</sup> Nei primi mesi dell'anno, infatti, quest'ultimo ha rilevato un'inesattezza nel celebre *Cours d'Analyse* di Camille Jordan e, non senza una certa qual mancanza di diplomazia, ne ha fatto l'oggetto di una lettera aperta apparsa sui

<sup>1</sup> Cfr. G. Peano a A. Genocchi, Torino 7.6.1883, in CASSINA 1952, pp. 344-345 e BORGATO 1991, p. 87.

<sup>2</sup> Cfr. P. Tardy a A. Genocchi, Genova 13.11.1883, in CASSINA 1952, p. 346.

<sup>3</sup> A. Genocchi a P. Tardy, Torino 11.11.1883, BUG, busta 12/83, c. 1r.

<sup>4</sup> Cfr. A. Genocchi a P. Tardy, Torino 11.3.1884, BUG, busta 12/86, cc. 1r-v, qui trascritta in Appendice.

<sup>5</sup> Cfr. GIUSEPPE PEANO, *Extrait d'une lettre* [su un teorema di Camille Jordan], 1884a, pp. 45-47; PHILIPPE GILBERT, *Correspondance*, «Nouvelles Annales de Mathématiques», 3, III, 1884, pp. 153-155; GIUSEPPE PEANO, [Réponse à Ph. Gilbert], 1884b, pp. 252-256; PHILIPPE GILBERT, *Lettre de M. Ph. Gilbert, Professeur à l'Université de Louvain*, «Nouvelles Annales de Mathématiques», 3, III, 1884, pp. 475-482. Sulla polemica con Gilbert cfr. anche PEANO 1884c p. XIV.

«Nouvelles Annales». Jordan, in contatto epistolare con Peano, ammette pubblicamente l'errore commesso, e richiede al suo interlocutore di esibire la dimostrazione della proprietà in questione.<sup>1</sup> Peano invia a Jordan la dimostrazione e la pubblica poco dopo sulla medesima rivista.<sup>2</sup> La critica di Peano ha suscitato però l'intervento inutilmente polemico e non pertinente di Gilbert,<sup>3</sup> professore di Analisi all'Università di Lovanio e autore a sua volta di un trattato di *Calcolo*. Genocchi, come testimonia il suo carteggio con Tardy, segue con attenzione la regia di questa polemica e supporta il suo allievo, lodando la schietta franchezza che ha improntato lo stile degli interventi dei protagonisti, Jordan e Peano, e criticando invece la condotta ambigua di Gilbert.<sup>4</sup>

Nel frattempo la macchina editoriale si è attivata in vista dell'uscita del *Genocchi-Peano*, annunciato in corso di stampa con un buon *battage* pubblicitario dalla casa editrice Bocca. Il volume, inizialmente a nome del solo Genocchi, a partire dai primi mesi del 1884 è reclamizzato con quello che diventerà il suo frontespizio definitivo.<sup>5</sup> Il trattato è licenziato infine nell'autunno del 1884, con notevole ritardo sui tempi previsti: la Prefazione, a firma del solo Peano, reca la data 1 settembre. L'autore sottolinea l'intenzione da cui è nato il volume, cioè quella di contribuire a colmare una lacuna nella manualistica di analisi in lingua italiana, pubblicando un corso, quale quello di Genocchi, «tanto, ed a ragione, stimato pel suo rigore».<sup>6</sup> Nello stesso tempo, appellandosi alla distanza naturale che intercorre fra un testo edito e la trascrizione delle lezioni orali a cura degli studenti, Peano giustifica l'esigenza, avvertitasi in corso d'opera, di apportare aggiunte e modifiche. Per redigerle egli ha quindi ritenuto necessario confrontare i contenuti dell'insegnamento orale impartito da Genocchi con quelli inseriti nei principali testi di analisi, in uso in Italia e all'estero, e ampliarli con il frutto di personali ricerche: un lavoro di studio critico, questo, che da un lato è confluito nella redazione di un apparato di note storico-bibliografiche (un elenco di

<sup>1</sup> Cfr. *Extrait d'une Lettre de M. C. Jordan*, in PEANO 1884a, p. 47.

<sup>2</sup> GIUSEPPE PEANO, [*Réponse à Ph. Gilbert*], 1884b, pp. 254-256.

<sup>3</sup> PHILIPPE GILBERT, *Lettre de M. Ph. Gilbert* ... 1884, pp. 153-155, cit. in nota 5 a p. 226.

<sup>4</sup> Cfr. A. Genocchi a P. Tardy, Torino 11.3.1884, BUG, busta 12/86, cc. 1r-2r; A. Genocchi a P. Tardy, Torino 10.4.1884, BUG, busta 12/87, cc. 1r-2r; A. Genocchi a P. Tardy, Torino 27.4.1884, BUG, busta 12/88, cc. 1r-1v in Appendice.

<sup>5</sup> Il repertorio *Bibliografia Italiana*, presente in BNT, comprende, oltre all'elenco di tutte le pubblicazioni italiane a stampa, anche le inserzioni pubblicitarie a pagamento delle maggiori case editrici. Il *Genocchi-Peano* è annunciato, a nome del solo Genocchi, nelle pubblicità dell'editore Bocca inserite in *Bibliografia Italiana*, XVII, 1883, p. 251 e con il titolo che resterà definitivo in *Bibliografia Italiana*, XVIII, 1884, p. 142.

<sup>6</sup> PEANO 1884c, Prefazione, pagina non numerata.

«date e nomi di autori» come rileva qui lo stesso Peano), dall'altro ha condotto ad evidenziare imprecisioni ed errori presenti in numerosi trattati di riferimento.

Il volume giunge a Genocchi il 23 settembre 1884, come testimonia la data autografa apposta sull'esemplare in suo possesso, ora conservato nella Biblioteca Passerini-Landi di Piacenza. La vicenda che ne segue è nota. La reazione di Genocchi di fronte ad una prima lettura del trattato è espressamente negativa ed egli non esita a sfogare la propria amarezza con P. Agnelli, C. Hermite, P. Tardy, cui manifesta l'intenzione di sconfessare pubblicamente Peano.

Da più parti alcuni storici hanno tentato di avallare questa brusca presa di posizione sia invocando l'indole di Genocchi, incline a scatti d'ira e poco diplomatica, sia ipotizzando il presunto risentimento per la qualifica di «importanti» con cui l'allievo aveva descritto le aggiunte da lui apportate, o appellandosi al dispiacere da lui provato per aver visto tanti suoi amici e corrispondenti colti in fallo, a causa delle inesattezze presenti nei loro trattati e qui denunciate esplicitamente da Peano.<sup>1</sup> Il carteggio intercorso con Tardy consente invece di mostrare come quella di Genocchi sia un'obiezione di carattere strettamente deontologico, che investe i temi della responsabilità e della collaborazione scientifica. Genocchi infatti non rimprovera a Peano di avere alterato il *dictat* delle sue lezioni, né si pronuncia sul merito scientifico delle integrazioni. Si mostra invece estremamente piccato per la mancata segnalazione dell'entità e dell'estensione di tutte le aggiunte, e per la ritrosia, da parte di Peano, ad accollarsi, a suo solo nome, la responsabilità di tali parti dell'opera, come si evince dalle sue parole:

Si è finito di stampare il volume di Calcolo che pubblicava il D<sup>r</sup> Peano mettendovi il mio nome. [...] Ma è strano che mentre il Peano mi aveva chiesto il permesso di pubblicare le mie lezioni, si sono poi fatte senza mia saputa non poche aggiunte e variazioni che non si sa dove comincino e dove finiscano, e inoltre molte annotazioni critiche delle quali non ho avuta conoscenza prima della pubblicazione e dopo ciò si è messo il mio nome in capo ad un frontespizio spropositato! Io avea dimandato che il mio nome fosse tolto dal frontespizio ma non potei ottenerlo, e mi limiterò a pubblicare una protesta...<sup>2</sup>

<sup>1</sup> CASSINA 1952, pp. 341-342; BOTTAZZINI 1981, p. 238; KENNEDY 1980, p. 14; KENNEDY 2002, p. 17.

<sup>2</sup> A. Genocchi a P. Tardy, Torino 25.10.1884, BUG, busta 12/96, c. 1v. Cfr. anche L. Cremona a A. Genocchi, Roma 2.12.[1884], G. Battaglini a L. Cremona, Roma 2.12.1884 ed A. Genocchi a L. Cremona, Torino 23.11.1884, in Luciano Carbone, Romano Gatto, Franco Palladino (a cura di), *L'epistolario Cremona-Genocchi (1860-1886), La costituzione di una nuova figura di matematico nell'Italia unificata*, Firenze, Olschki, 2001, pp. 139, 140, 211-212.

Il risentimento di Genocchi non rimane confinato solo a livello di corrispondenze private, ma si concreta nella pubblicazione di alcune secche dichiarazioni apparse su prestigiose riviste dell'epoca – in Belgio la «Mathesis» di Mansion, in Francia i «Nouvelles Annales» e in Italia gli «Annali» di Brioschi – in cui, senza entrare nella questione del merito scientifico dell'opera, si «stabilisce la verità dei fatti»<sup>1</sup> e cioè l'effettiva estraneità di Genocchi alla redazione del volume.<sup>2</sup>

Nel novembre del 1884 sono ormai pervenuti al matematico piacentino, da più parti, giudizi altamente elogiativi del *Genocchi-Peano*. Prima ancora di venire a conoscenza dell'*affaire* legato al disconoscimento della paternità dell'opera, il 6 ottobre 1884 Hermite scrive a Genocchi elogiando il trattato<sup>3</sup> e, in particolar modo, l'ineccepibile paragrafo sulle funzioni interpolari, a tal punto chiaro che egli non ha avvertito problemi nella sua lettura, nonostante la poca dimestichezza con la lingua italiana.<sup>4</sup> Il 31 ottobre torna a scrivergli sullo stesso tema, mostrandosi dispiaciuto per il torto che Genocchi ha subito da parte di Peano, assistente «indiscreto e infedele», ma lo invita a prescindere dai risvolti morali della vicenda e ribadisce il suo apprezzamento per un'opera che concede ampio spazio alle moderne esigenze del rigore.<sup>5</sup> Mansion reputa «eccellente» il lavoro di Peano<sup>6</sup> e Schwarz scrive a Genocchi:

Die Arbeiten des Herrn Peano finde ich *sehr sorgfältig* redigiert; ich bin der Meinung, daß die eine über Integrale einen beträchtlichen Fortschritt enthält. Hoffentlich gefällt mein neuester Beweis auch Ihnen.<sup>7</sup>

Ecco allora che, nel volgere di appena un mese, Genocchi rivede radicalmente la sua opinione sulla condotta tenuta da Peano, a cui è ormai solo ascritta una colpa di «imprudenza», tipicamente giovanile:

Il Peano [...] in sostanza non è un cattivo giovine e non ha agito con cattiva intenzione. È stato imprudente facendo al mio corso aggiunte che io non aveva

<sup>1</sup> A. Genocchi a P. Tardy, Torino 25.11.1884, BUG, busta 12/97, c. 1v.

<sup>2</sup> ANGELO GENOCCHI, *Correspondance*, «Mathesis» (P. Mansion), 4, 1884, pp. 224-225; ANGELO GENOCCHI, *Correspondance*, «Nouvelles Annales de Mathématiques», 3, III, 1884, pp. 579, 580; ANGELO GENOCCHI, *Dichiarazione*, «Annali di Matematica pura ed applicata», s. 2, 12, 1883-1884, pagina non numerata.

<sup>3</sup> C. Hermite a A. Genocchi, Flanville par Metz 6.10.1884 in CASSINA 1952, p. 348 e MICHELACCI 2005, pp. 176-179.

<sup>4</sup> C. Hermite a A. Genocchi, Flanville par Metz 6.10.1884 in CASSINA 1952, p. 348 e MICHELACCI 2005, p. 177.

<sup>5</sup> C. Hermite a A. Genocchi, Paris 31.10.1884 in CASSINA 1952, pp. 348-349 e MICHELACCI 2005, pp. 179-182.

<sup>6</sup> PAUL MANSION, [N.d.r.], «Mathesis» (P. Mansion), 4, 1884, p. 224.

<sup>7</sup> H. A. Schwarz a A. Genocchi, Göttingen, 9.1.1884, FSN, c.p.

previamente approvate né conosciute, ma solo mosso dal pensiero di accrescere il merito del suo libro il che per suo giudizio doveva piacere anche a me. Non volle fare una speculazione perché aveva un // contratto coi librai Bocca e la somma pattuita non si variava fossero molte o poche le copie vendute. Del resto sento che molti trovano l'opera eccellente.<sup>1</sup>

La contrastata vicenda editoriale del *Genocchi - Peano* non è priva di ricadute negative per Peano: l'editore Bocca «va un poco in collera» con lui e ricuce i rapporti solo grazie alle assicurazioni di Genocchi che il libro «era stato lodato anche da illustri matematici» e dopo la conferma di quest'ultimo che la pubblicazione del corso era avvenuta previo suo consenso.<sup>2</sup> Peano è descritto da Genocchi a Luigi Cremona come fortemente «abbattuto e addolorato» per il clamore suscitato dalla reazione di Genocchi<sup>3</sup> e quest'ultimo, plausibilmente consapevole di aver gettato un certo discredito sul suo assistente, rinuncia a pubblicare altre puntualizzazioni sul «Giornale di Matematica ad uso degli studenti delle Università Italiane» di Giuseppe Battaglini e sugli «Zeitschrift für Mathematischen und Naturalischen Wissenschaften» di Siegmund Günther.

A partire dal dicembre del 1884, i rapporti fra Genocchi e Peano tornano ad essere improntati a toni di reciproca cordialità e tali resteranno fino alla fine.<sup>4</sup> A seguito della *restitutio* della condotta del suo allievo personalmente compiuta da Genocchi, alcuni corrispondenti si ricredono sul conto di Peano. Tardy dichiara di non aver mai dubitato della sua lealtà<sup>5</sup> e Hermite, rallegrandosi per la conclusione del malinteso, si spinge a scrivere:

J'ai eu une véritable satisfaction à apprendre par votre dernière lettre que l'affaire de la publication de l'ouvrage de M. Peano était beaucoup moins grave pour lui que je ne pensais, et qu'au fond tout se réduit à un simple mal entendu, sans qu'il y ait eu à sa charge un abus de confiance.<sup>6</sup>

La vicenda si può considerare definitivamente conclusa con la convalida delle affermazioni di Genocchi da parte di Peano, pubblicata dapprima sulla rivista belga «Mathesis» nel 1885 e, successivamente, nel 1887, nella

<sup>1</sup> A. Genocchi a P. Tardy, Torino 25.11.1884, BUG, busta 12/97, cc. 1r-v.

<sup>2</sup> A. Genocchi a P. Tardy, Torino 6.12.1884, BUG, busta 12/98, cc. 1v-2r.

<sup>3</sup> A. Genocchi a L. Cremona, Torino 23.11.1884, in Luciano Carbone, Romano Gatto, Franco Palladino (a cura di), *L'epistolario Cremona-Genocchi*, cit., 2001, p. 211.

<sup>4</sup> Cfr. ad esempio la lettera di G. Peano a A. Genocchi, Torino 7.9.1886, FGP, ms. G2, c. 1v: «Godo assai che Ella abbia lasciato Torino, ove [da] alcuni giorni fa un caldo soffocante, per l'aria marina, dove si troverà assai meglio. Sono certo che Ella ritornerà a Torino con una buona dose di salute. Io le auguro, amatissimo signor professore, tutto il bene che posso [...]».

<sup>5</sup> P. Tardy a A. Genocchi, Genova 28.11.1884 in CASSINA 1952, p. 347.

<sup>6</sup> C. Hermite a A. Genocchi, Paris 20.11.1884, FSN, c. 1r.

Prefazione al trattato *Applicazioni geometriche del calcolo infinitesimale* che, pur entro limiti di una sostanziale autonomia, si configura come il secondo tomo del *Genocchi - Peano*.<sup>1</sup> Qui l'autore si limita a segnalare, elencando i numeri dei rispettivi paragrafi, tutte quelle aggiunte e modifiche che non sono state stampate in corpo minore, o che non sono state contrassegnate con la sigla del suo nome nel trattato dell'84 e se ne assume la piena responsabilità.

Nel 1885 la salute di Genocchi sembra conoscere un lieve miglioramento, tanto che egli può riprendere le sue lezioni, ma è purtroppo costretto ad interromperle dopo un breve periodo,<sup>2</sup> e gradualmente finisce per estraniarsi dalla vita scientifica e accademica:<sup>3</sup>

Anche per quest'anno ho incaricato il D<sup>r</sup> Peano di far le mie veci all'Università. Io non intendo di riprendere le mie lezioni. Nulla posso dirvi di lavori nuovi e non ho visto i libri che mi citate.<sup>4</sup>

Genocchi inoltre mostra di non essere a conoscenza del fatto che Peano sta redigendo le *Applicazioni geometriche del calcolo infinitesimale*, nonostante l'allievo l'avesse tenuto al corrente in merito,<sup>5</sup> dal momento che scrive a Tardy che Peano non pensa «per ora al secondo volume del Calcolo», e ribadisce di aver perso interesse per la ricerca e per le novità editoriali, fra cui il primo volume del *Traité d'Analyse* di H. Laurent.<sup>6</sup> Nello stesso tempo egli manifesta il proposito, che però non metterà mai in pratica, di ritirarsi del tutto dall'insegnamento.<sup>7</sup> Sempre più spesso Ge-

<sup>1</sup> GIUSEPPE PEANO, *Correspondance*, «Mathesis» (P. Mansion), 5, 1885, p. 11; GIUSEPPE PEANO, *Applicazioni geometriche del calcolo infinitesimale*, 1887b, pp. VIII-IX. Le stesse precisazioni saranno ribadite nel necrologio di Genocchi: cfr. GIUSEPPE PEANO, *Angelo Genocchi*, 1890a, pp. 198-199.

<sup>2</sup> Cfr. ASUT, XIV B, 93, *Preside. Personale Insegnante della Fac.*<sup>a</sup> *Disposizioni relative*, 1.2.1886, 11.2.1886, 18.2.1886; FGP, ms. TT, *Sua [di Genocchi] supplenza per due mesi*, 18.2.1886; ASUT XIV B, 93, *Disposizioni relative alla Facoltà di Scienze. Insegn.*<sup>ti</sup>, *iscrizioni, tasse, esami, orari, relazione*, 15.5.1886. Cfr. anche A. Genocchi a P. Tardy, [Torino 1885], BUG, busta 12/104, c. 1r; E. D'Ovidio a P. Tardy, Torino 27.2. [1885], BUG, busta 22/7, c. p.

<sup>3</sup> Cfr. A. Genocchi a P. Tardy, Torino 5.3.1886, BUG, busta 12/111, cc. 1r-v; A. Genocchi a P. Tardy, Torino 20.10.1886, BUG, busta 12/116, cc. 1r-v; A. Genocchi a P. Tardy, Torino 28.12.1886, BUG, busta 12/117, c. 1r; E. D'Ovidio a P. Tardy, Torino 28.12.1888, BUG, busta 22/9, c.p.; F. Siacci a P. Tardy, Torino 10.3.1889, BUG, busta 18/2, cc. 1r-2r.

<sup>4</sup> A. Genocchi a P. Tardy, Torino 14.11.1887, BUG, busta 12/118, c. 1r.

<sup>5</sup> G. Peano a A. Genocchi, Torino 7.9.1886, FGP, ms. G2, c. 1v: «Per quanto riguarda me, vado terminando finalmente il libro in corso di pubblicazione.»

<sup>6</sup> A. Genocchi a P. Tardy, Torino 25.12.1885, BUG, busta 12/110, c. 2r. Cfr. anche P. Tardy a A. Genocchi, Genova 22.12.1885, FGP, ms. EE, c. 2v.

<sup>7</sup> A. Genocchi a P. Tardy, Torino 20.10.1886, BUG, busta 12/116, cc. 1r-v: «All'Università sono cominciati gli esami a cui da // parecchi anni non intervengo. Presto cominceranno le lezioni e mi sento ancora incerto di darle o di lasciarle al mio assistente avendo sofferto un forte raffreddore dopo il mio ritorno da Cornigliano. Sono molto tentato di seguire il vostro esempio e di ritirarmi del tutto dall'insegnamento. Basta: vedremo.»



nocchi ricorre all'aiuto di Peano,<sup>1</sup> e il 29 maggio 1886 conclude la sua trentennale carriera di insegnamento all'Università di Torino, tenendo l'ultima lezione.

### 3. LE LEZIONI DI GENOCCHI E IL TRATTATO DEL 1884

La trama del *Genocchi - Peano* è costituita dalle lezioni di Calcolo infinitesimale, impartite dal matematico piacentino all'Università di Torino, a partire dal 1865. Secondo la testimonianza di Peano, Genocchi le aveva in gran parte scritte e le dettava con stile piano, lucido ed essenziale, ricorrendo all'aiuto di uno studente per scrivere le formule alla lavagna.<sup>2</sup> Un resoconto fedele dell'insegnamento di Genocchi proviene quindi da due suoi manoscritti autografi: il *Calcolo differenziale* e l'*Introduzione alle Lezioni di Calcolo differenziale*, risalenti al 1865-1867 conservati a Piacenza e da tre altri manoscritti delle sue lezioni redatte da allievi, attualmente custoditi a Torino.<sup>3</sup> I *marginalia* apposti agli autografi piacentini, e datati fino al 1881-1885, testimoniano l'incessante lavoro di revisione e di perfezionamento stilistico e di contenuti compiuto da Genocchi. Essi inoltre permettono di individuare le fonti di riferimento, cui attingeva di preferenza per le sue lezioni, grazie alle citazioni e ai rimandi ai trattati di C. Hermite, E. Hoppe, J. Hoüel, J. Bertrand, G. Novi, A.L. Cauchy, J. Serret, J.-M. Duhamel, ecc.

La storiografia secondaria, che si è prevalentemente incentrata sui manoscritti piacentini, ha soprattutto evidenziato l'influenza esercitata dal *Cours d'analyse* di Cauchy sull'insegnamento di Genocchi.<sup>4</sup> U. Cassina in particolare, riteneva che «non vi fosse traccia di redazioni più recenti» delle lezioni e sottolineava che la presenza, in questi appunti, di imprecisioni ed errori analoghi a quelli denunciati da Peano sui trattati di analisi dell'epoca, avrebbe potuto amareggiare Genocchi.<sup>5</sup> Ad esempio tro-

<sup>1</sup> Cfr. A. Genocchi a P. Tardy, Torino 5.3.1886, BUG, busta 12/111, c. 1r: «Ho sofferto per infreddature che mi hanno costretto ad astenermi dalle lezioni. Il Ministro mi ha concesso due mesi di riposo accogliendo la proposta della Facoltà di farmi supplire dall'assistente D<sup>e</sup> Peano.»; A. Genocchi a P. Tardy, Torino 28.12.1886, BUG, busta 12/117, c. 1r: «Io sono sempre tormentato da un forte raffreddore al quale devo se non ho potuto riprendere le mie lezioni: mi supplisce al solito l'assistente D<sup>e</sup> Peano, ed io mi annoio mortalmente non facendo niente.»

<sup>2</sup> GIUSEPPE PEANO, *Angelo Genocchi*, 1890a, p. 197.

<sup>3</sup> ANGELO GENOCCHI, [*Calcolo differenziale 1865-66*], FGP, ms. S<sub>1</sub>, ff. 1-24; [*Introduzione alle Lezioni di Calcolo differenziale 1867*], FGP, ms. S<sub>2</sub>, ff. 1-13 (i due manoscritti sono redatti su fogli formato protocollo, di quattro pagine ciascuno, scritti sulla metà di destra); [*Calcolo differenziale*, 1871-72, ADT, cc. 1-497; *Calcolo integrale*, 1871-72, ADT, cc. 1-338; *Calcolo Differenziale ed Integrale, Lezioni del Prof. Genocchi, 1870-71*, BCT, I° *Calcolo Differenziale*, ms. 669, cc. 1-356, II° *Calcolo Integrale*, ms. 570, cc. 1-289; *Sunti delle Lezioni di Calcolo Integrale fatte dal Prof.<sup>e</sup> A.<sup>lo</sup> Genocchi nella Regia Università di Torino 1881-82* Compilati da Benvenuto Luigi, AFT, An.C.6.16, cc. 1-223.

<sup>4</sup> Cfr. CASSINA 1952, pp. 350-354; BOTTAZZINI 1991.

<sup>5</sup> Cfr. CASSINA 1952, p. 343.

viamo in questi manoscritti la definizione di limite come «una quantità fissa a cui una quantità variabile si accosta in modo da poterne differire quanto poco si voglia senza mai eguagliarla»<sup>1</sup> e un'incerta trattazione dei rapporti fra continuità e derivabilità.

La distanza fra queste lezioni e il *Genocchi-Peano* emerge poi in tutta evidenza nel paragrafo di apertura, in cui si illustra la «Divisione delle funzioni»,<sup>2</sup> senza alcun cenno alla teoria assiomatica dei numeri reali. Di grande interesse risultano invece i paragrafi sulla risoluzione numerica delle equazioni trascendenti,<sup>3</sup> sul teorema di Taylor<sup>4</sup> e sull'interpolazione.<sup>5</sup> Tutti questi temi, infatti, costituiranno uno degli oggetti preferenziali di ricerca da parte di Peano negli ultimi anni della sua vita. La loro introduzione nell'insegnamento, lungi dall'essere una bizzarria di Peano, come lascerebbero supporre le critiche di Francesco Tricomi,<sup>6</sup> rappresenta un retaggio dell'insegnamento di Genocchi, che ampio spazio concedeva a questi argomenti «d'utilità anche pratica».<sup>7</sup>

Pur trattandosi dell'unica redazione autografa di Genocchi, i manoscritti piacentini non rappresentano tuttavia una traccia esaustiva del corso da lui tenuto, dal momento che egli non aveva avuto la forza di «metterlo tutto per scritto».<sup>8</sup> Tali appunti infatti, arrestandosi alla teoria delle funzioni implicite, non comprendono alcun elemento di calcolo integrale, né la trattazione delle equazioni differenziali o delle applicazioni geometriche del Calcolo. Inoltre, tenendo conto del fatto che Peano non ebbe mai occasione di vedere questi manoscritti, come egli stesso dichiara,<sup>9</sup> ci è parso preferibile appuntare l'attenzione su quelle «migliaia di sunti» scritti dagli allievi di Genocchi e generalmente fedeli, su cui Peano effettivamente si basò per una prima stesura del trattato del 1884.<sup>10</sup>

<sup>1</sup> ANGELO GENOCCHI, [*Introduzione alle Lezioni di Calcolo differenziale 1867*], FGP, ms. S<sub>2</sub>, f. 2, c. 1r.

<sup>2</sup> ANGELO GENOCCHI, [*Introduzione alle Lezioni di Calcolo differenziale 1867*], FGP, ms. S<sub>2</sub>, f. 1, cc. 1r-2v. <sup>3</sup> ANGELO GENOCCHI, [*Calcolo differenziale 1865-66*], FGP, ms. S<sub>1</sub>, f. 7, cc. 1r-2v.

<sup>4</sup> ANGELO GENOCCHI, [*Calcolo differenziale 1865-66*], FGP, ms. S<sub>1</sub>, f. 8, cc. 1r-2v, f. 9, cc. 1r-2v, f. 10, cc. 1r-2r. <sup>5</sup> ANGELO GENOCCHI, [*Calcolo differenziale 1865-66*], FGP, ms. S<sub>1</sub>, f. 10, c. 2v.

<sup>6</sup> FRANCESCO TRICOMI, *Matematici torinesi dell'ultimo secolo*, «Atti dell'Accademia delle Scienze di Torino», 102, 1967-68, p. 257: «Quanto al lungo insegnamento del Peano [...] non si può tacere che esso, ottimo all'inizio, cominciò a scadere intorno alla fine del secolo scorso, degenerando infine in una poco seria congerie di logica matematica, applicazioni del calcolo vettoriale, approssimazioni numeriche, ecc.»

<sup>7</sup> ANGELO GENOCCHI, [*Calcolo differenziale 1865-66*], FGP, ms. S<sub>1</sub>, f. 7, c. 1r.

<sup>8</sup> A. Genocchi a P. Agnelli, Torino 16.8.1883, in P. AGNELLI, *Di Angelo Genocchi memoria biografica*, Strenna piacentina, 1893, p. 42 e CASSINA 1952, p. 345.

<sup>9</sup> GIUSEPPE PEANO, *Angelo Genocchi*, 1890a, p. 202.

<sup>10</sup> Cfr. PEANO 1890a, cit., pp. 198-199. A proposito della redazione del *Genocchi-Peano* cfr. anche G. Peano a E. Cesàro, Torino 14.1.1891, in PALLADINO 2000, pp. 17-18: «[...] abbondano anche le correzioni tipografiche [...] nel principio di quel libro, e specialmente nel primo foglio di stam-

La prima di queste redazioni, conservata nell'Archivio privato del prof. Mario Umberto Dianzani, è costituita dagli appunti presi da uno studente anonimo che frequentò le lezioni di Genocchi nell'anno accademico 1871-72.<sup>1</sup> L'analisi di tali manoscritti ha evidenziato alcune differenze non solo dal punto di vista stilistico – espressioni farraginose o poco precise possono infatti derivare dalla disattenzione o dall'imprecisione dello studente che stilò gli appunti – ma anche a livello strutturale, con interi paragrafi la cui collocazione risulta differente rispetto al piano del *Genocchi - Peano*: i principii di differenziazione, ad esempio, sono posti fra la teoria delle serie e la trattazione delle serie di Taylor. A livello di tecnica dimostrativa occorre rilevare come in alcune dimostrazioni è assunta da Genocchi senza giustificazioni la completezza dei numeri reali<sup>2</sup> e sono compiute imprecisioni nell'invertire il senso delle implicazioni: la continuità viene ad esempio a configurarsi come condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza della derivata.<sup>3</sup>

All'anno accademico 1870-71 risalgono invece le *Lezioni* di Genocchi, in possesso di Adolfo Rossi, come appare dalla firma apposta sul frontespizio, e conservate alla Biblioteca Civica di Torino.<sup>4</sup> Tali lezioni sono suddivise in due tomi, il primo dei quali, che raccoglie il *Calcolo differenziale*, è particolarmente utile per il confronto con il *Genocchi - Peano*. Esso è stato a lungo considerato perduto ed è riemerso solo recentemente, in fase di catalogazione del patrimonio librario della Biblioteca Civica. Comprendente 57 lezioni di Calcolo differenziale e 36 di Calcolo integrale, il manoscritto di Rossi, la cui redazione rivela una maggior precisione ed accuratezza, rispetto agli appunti citati sopra, conservati nell'Archivio Dianzani,<sup>5</sup> consente di apprezzare la ricchezza di esempi ed esercizi con cui Genocchi corredeva l'insegnamento teorico, la simplici-

pa; poiché io diedi al compositore le lezioni autografate dagli allievi, delle mie lezioni, pensando poi di correggerle sulle bozze (allora ero nuovo allo stampare!), cosa che poi non mi riuscì bene; quindi i fogli successivi li scrissi io stesso; e quel primo io lo voleva rifare, ma ne fui impedito dall'editore.»

<sup>1</sup> Si tratta dei manoscritti [*Calcolo differenziale*], 1871-72, ADT, cc. 1-497; [*Calcolo integrale*], 1871-72, ADT, cc. 1-338. Essi sono parzialmente trascritti e commentati in GIULIANA BORZIERI (relatore Livia Giacardi), *Le lezioni di Analisi di Angelo Genocchi (1871-72) e il trattato Genocchi - Peano (1884) a confronto: un'analisi storico-critica*, Tesi di Laurea in Matematica, Università di Torino, a.a. 1997-98; un sunto è apparso in *Tesi*, «Annali di Storia delle Università Italiane», 5, 2001, pp. 283-284. Il microfilm di questi manoscritti è conservato nella Biblioteca del Dipartimento di Matematica dell'Università di Torino, Inv. 11030, Rullo 17.

<sup>2</sup> [*Calcolo differenziale*], ADT, cc. 8, 89-90.

<sup>3</sup> [*Calcolo differenziale*], ADT, c. 56.

<sup>4</sup> *Calcolo Differenziale ed Integrale, Lezioni del Prof. Genocchi, 1870-71*, BCT, I° *Calcolo Differenziale*, ms. 669, cc. 1-356, II° *Calcolo Integrale*, ms. 570, cc. 1-289.

<sup>5</sup> Ad esempio, il valore per l'esponenziale è correttamente registrato in *Calcolo Differenziale*, BCT, c. 12, mentre risulta errato in [*Calcolo differenziale*], ADT, c. 10.

tà della sua esposizione della teoria elementare delle serie<sup>1</sup> e l'ampiezza con cui trattava le applicazioni geometriche del calcolo infinitesimale.<sup>2</sup>

Le *Lezioni* di Rossi, così come quelle conservate a Piacenza, si aprono con la classificazione delle funzioni in uniformi e multiformi, di una e di più variabili, algebriche e trascendenti, implicite ed esplicite, razionali ed irrazionali, intere e frazionarie e così via. Si trattava di un tema, affrontato da Genocchi ricorrendo ai testi di C. Hermite, E. Hoppe e J. Hoüel, cui era assegnato il ruolo di paragrafo preliminare al *Calcolo*. Nel trattato del 1884 Peano abbandona del tutto tale trattazione, che viene sostituita con un paragrafo dedicato ai contributi sulla teoria assiomatica dei numeri reali, desunti dai lavori di U. Dini, R. Dedekind e M. Pasch. A fianco di questi, Peano cita i contributi di G. Cantor, ripresi da A. Harnack, R. Lipschitz e P. du Bois-Reymond: il matematico tedesco, con un'impostazione meno semplice rispetto alle precedenti, definisce infatti gli irrazionali come limiti di successioni di razionali, senza ricorrere al concetto di sezione.<sup>3</sup> Segue la definizione rigorosa del concetto di funzione di variabile reale,<sup>4</sup> mentre nelle *Annotazioni* Peano ripercorre il percorso storico di questo concetto, con citazioni di passi originali, selezionati a partire dal testo di H. Hankel, *Untersuchungen über die unendlich oft oscillirenden und unstetigen Funktionen* (Tübingen, 1870).<sup>5</sup>

Numerose sono le dimostrazioni riprese dalle *Lezioni* di Genocchi: ad esempio quelle dei teoremi sull'algebra dei limiti,<sup>6</sup> e la dimostrazione del teorema del differenziale totale,<sup>7</sup> poi ulteriormente semplificata nelle *Lezioni di Analisi infinitesimale* di Peano all'Accademia Militare.<sup>8</sup> Tuttavia, anche nelle *Lezioni* in possesso di Rossi si riscontrano incertezze teoriche, espressioni ambigue ed arcaismi del tipo «far crescere indefinitamente». La trattazione di alcuni paragrafi risulta del resto estremamente prolissa rispetto al trattato a stampa: così, mentre Peano dedica appena poche righe alla differenziazione delle funzioni composte, il medesimo tema occupa quasi sette pagine nelle *Lezioni* di Rossi.<sup>9</sup> La medesima prolissità, non meramente giustificabile sulla base delle esigenze didattiche, né appellandosi allo stile espositivo del cura-

<sup>1</sup> *Calcolo Differenziale*, BCT, cc. 60-72.

<sup>2</sup> *Calcolo Differenziale*, BCT, cc. 233-356.

<sup>3</sup> PEANO 1884c, pp. VII-VIII e pp. 1-3.

<sup>4</sup> PEANO 1884c, p. 3.

<sup>5</sup> PEANO 1884c, p. VIII. Nell'esemplare del *Genocchi-Peano* conservato in FCP, sui margini di p. 3, si trovano gli appunti presi da Peano per redigere l'Annotazione al N. 6 (PEANO 1884c, p. VIII) inerente la storia del concetto di funzione.

<sup>6</sup> Cfr. *Calcolo Differenziale*, BCT, cc. 3-8 e PEANO 1884c, pp. 5-7.

<sup>7</sup> Cfr. *Calcolo Differenziale*, BCT, cc. 110-113 e PEANO 1884c, pp. 139-140.

<sup>8</sup> Cfr. GIUSEPPE PEANO, *Lezioni di analisi infinitesimale*, 1893h, vol. II, p. 143.

<sup>9</sup> Cfr. *Calcolo Differenziale*, BCT, cc. 37-43 e PEANO 1884c, p. 41.

tore, emerge con evidenza accostando le dimostrazioni del teorema del confronto per i limiti di funzioni fornite rispettivamente da Genocchi e da Peano. Se nel *Genocchi-Peano* la dimostrazione è condensata in quattro righe,<sup>1</sup> nelle *Lezioni* ha un'estensione quadrupla e del medesimo enunciato, per altro elementare, sono fornite due dimostrazioni equivalenti.<sup>2</sup>

Esiste infine un manoscritto di *Sunti delle Lezioni di Calcolo Integrabile*, compilati dallo studente Luigi Benvenuto nell'anno accademico 1881-82 e conservate a Torino nel Fondo Faà di Bruno della Biblioteca dell'Istituto del Suffragio.<sup>3</sup> Si tratta di una corposa redazione, particolarmente interessante per il fatto che proprio nell'aprile del 1882 Peano subentrava a Genocchi, tenendo le sue prime lezioni di Calcolo infinitesimale. Fra gli elementi di maggior novità che tali lezioni presentano spicca la trattazione di Genocchi degli integrali del tipo  $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ , già apprezzata per il suo rigore da Peano, e quella delle equazioni differenziali, una teoria non affrontata nel *Genocchi-Peano*, ma destinata a rivelarsi uno dei temi di ricerca privilegiati da Peano negli anni immediatamente successivi.<sup>4</sup>

L'analisi comparata di queste *Lezioni* con il trattato a stampa,<sup>5</sup> se da un lato evidenzia la cura con cui Genocchi impartiva il suo insegnamento, dall'altro ne rimarca la distanza sotto il profilo contenutistico, strutturale, espositivo e metodologico.

<sup>1</sup> PEANO 1884c, p. 7: «Teorema V. – Se una quantità è sempre compresa fra due altre che tendono verso uno stesso limite, anche la prima tende verso questo limite. Infatti se  $P$  e  $Q$  sono due variabili che tendono verso  $A$ , ed  $R$  è sempre compreso fra  $P$  e  $Q$ , sarà anche  $R - A$  compreso fra  $P - A$  e  $Q - A$ ; e se si rendono  $P - A$  e  $Q - A$  minori di  $\epsilon$  sarà anche  $R - A$  minore di  $\epsilon$  ossia  $R$  ha per limite  $A$ .»

<sup>2</sup> *Calcolo Differenziale*, BCT, cc. 8-9: «Supponiamo ora di avere tre quantità variabili che potrebbero anche essere costanti. Siano esse  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  tali che il valore di  $Q$  sia sempre compreso fra i valori di  $P$  e di  $R$  cioè  $P < Q < R$ . Se  $P$  ed  $R$  tendono verso uno stesso limite  $L$ , questi sarà pure il limite di  $Q$ . Difatti se la differenza fra  $P$  o  $R$  ed  $L$  può divenire tanto piccola quanto si vuole, siccome  $Q$  è sempre compreso fra  $P$  ed  $R$ , la differenza fra  $Q$  ed  $L$  potrà pure divenire tanto piccola quanto si vuole ossia  $\lim Q = L$ . Ciò si può pure dimostrare in altro modo. Possiamo scrivere  $Q = P + \theta (R - P)$  in cui  $\theta$  varierà solo da 0 ad 1 giacché se si fa  $\theta = 0$  si ha  $Q = P$ , e se si fa  $\theta = 1$  si ha  $Q = R$ . Avremo allora  $\lim Q = \lim P + \lim [\theta (R - P)]$  ossia  $\lim Q = \lim P + \lim \theta \times \lim (R - P)$ . Ora  $\lim \theta$ , essendo  $\theta$  compreso fra 0 ed 1, è compreso anche fra 0 ed 1,  $\lim (R - P)$  tende ad  $L - L$  ossia a zero, quindi  $\lim Q = \lim P$  ossia  $\lim Q = L$  come si voleva provare. Se una delle quantità è costante, il suo limite è il suo valore costante, così può darsi che  $R$  sia costante: avrà per valore costante  $L$ , e la dimostra / zione sarà sempre la stessa».

<sup>3</sup> *Sunti delle Lezioni di Calcolo Integrabile fatte dal Prof.<sup>re</sup> A.<sup>lo</sup> Genocchi nella Regia Università di Torino 1881-82* Compilati da Benvenuto Luigi, AFT, An.C.6.16, cc. 1-223.

<sup>4</sup> *Sunti delle Lezioni di Calcolo Integrabile* ..., AFT, cc. 145, 147-149, 169-223.

<sup>5</sup> Un'analisi maggiormente dettagliata è condotta nella mia tesi di dottorato, *Giuseppe Peano docente e ricercatore di analisi*, diretta da CLARA SILVIA ROERO, in corso presso il Dipartimento di Matematica dell'Università di Torino.

L'aggiornamento e la riforma dei programmi dei corsi di Calcolo infinitesimale non sono infatti sufficienti, da soli, a spiegare la maggiore attenzione posta da Peano all'assiomatica di Dedekind, alla definizione di limite superiore ed inferiore, alla teoria della derivabilità e dell'integrabilità e ai criteri per determinare massimi e minimi di funzioni di più variabili. Nel *Genocchi-Peano* è inoltre ben chiara la distinzione – non solo labile, ma talora del tutto assente nelle lezioni di Genocchi – fra i concetti di continuità e di continuità uniforme, di convergenza e di convergenza uniforme.

Il maggior rigore di Peano si esplica non solo nell'elaborazione dei controesempi e nelle definizioni rigorose dei concetti, ma anche nella volontà di depurare gli enunciati dei teoremi da quelle condizioni superflue di cui spesso erano infarciti i trattati classici. Le notazioni utilizzate da Peano risultano, generalmente, più chiare ed uniformi rispetto a quelle di Genocchi, tuttavia manca nel *Genocchi-Peano* qualsiasi impiego dell'ideografia logica, i connettivi e i quantificatori sono assenti, con una certa ritrosia è introdotto il simbolo di sommatoria e la gestione algoritmica dei valori assoluti non è ancora condotta con sicurezza.

Infine, mentre emerge una comune idiosincrasia per l'approccio grafico-intuitivo, a cui Genocchi ricorre estremamente di rado e che risulta assente nel trattato dell'84, per contro è da rilevare l'innegabile progresso ottenuto da Peano relativamente alla generalità delle dimostrazioni. È plausibile che un'esigenza di mediazione didattica abbia indotto Genocchi a far precedere sovente la dimostrazione di un teorema da alcuni casi particolari, ricavando poi induttivamente la proposizione desiderata, tuttavia questo approccio risulta una pratica dimostrativa ricorrente anche nei manoscritti piacentini, la cui redazione non era finalizzata alla consultazione da parte degli allievi.

Le differenze che abbiamo segnalato trovano del resto riscontro nei *Registri delle lezioni* tenute da Genocchi, negli anni 1877-78, 1882-83, 1883-84 e 1885-86.<sup>1</sup> Tali registri, finora studiati solo dal punto di vista biografico-aneddotico,<sup>2</sup> permettono di verificare le mutue corrispondenze e le discordanze fra i contenuti previsti nei programmi ufficiali, quelli presentati a lezione dai due matematici e quelli confluiti nel *Genocchi-Peano* e consentono di evidenziare le differenze nelle cadenze didattiche degli

<sup>1</sup> *Registro delle Lezioni di Calcolo infinitesimale dettate dal Sig. Prof. Genocchi (Assistente E. Martini) nell'anno scolastico 1877-78*, FGP, ms. SS; *Registro delle Lezioni di Calcolo infinitesimale dettate dal Sig. Prof. Genocchi nell'anno scolastico 1881-82*, FGP, ms. SS, cc. 1r-5v; *Registro delle Lezioni di Calcolo infinitesimale dettate dal Sig. Prof. Genocchi (assistente Dr Peano) nell'anno scolastico 1883-84*, FGP, ms. SS, cc. 1r-6v; *Registro delle Lezioni di Calcolo infinitesimale dettate dal Sig. Prof. Genocchi e Assistente Peano nell'anno scolastico 1885-86*, FGP, ms. SS, cc. 1r-6r.

<sup>2</sup> CASSINA 1952, p. 338.

insegnamenti di Peano e di Genocchi. Per esempio, Peano dedicava più lezioni alle formule di interpolazione e di Simpson<sup>1</sup> e alle funzioni interpolari,<sup>2</sup> mentre Genocchi preferiva soffermarsi sulla teoria degli integrali impropri<sup>3</sup> e sugli integrali euleriani.<sup>4</sup>

Il trattato del 1884, secondo la qualifica dello stesso Peano, è essenzialmente «un lavoro di compilazione» per la redazione del quale è stato necessario consultare un gran numero di testi, per la maggior parte dichiarati nelle note di apertura del volume. Le fonti annoverano una trentina di opere, fra cui i principali manuali di analisi infinitesimale italiani, francesi e tedeschi, e in particolare i corsi di C. Jordan, J. Serret, U. Dini, A. Harnack ed I. Todhunter, e oltre un centinaio di monografie. Stupisce soprattutto la citazione di lavori recentissimi, fra cui il testo di O. Rausenberger sulla teoria delle funzioni periodiche, edito nel 1884, e il cui riferimento fu aggiunto in fase di revisione delle bozze di stampa, come si deduce dai *marginalia* apposti sull'esemplare di Parma.<sup>5</sup> Alla luce di queste note autografe si può stabilire la consistenza e la successione temporale delle letture di Peano. Per la redazione del capitolo sulle serie, egli ad esempio annota, in un foglio bianco rilegato fra le pagine 54 e 55, alcuni rimandi ai lavori di N. Trudi, D. Besso, E. Catalan, F. Siacci, E. Lucas, G. Ascoli, J. Thomae, U. Dini, P. du Bois-Reymond, M. A. Stern, J. A. Grunert, L. Öttinger e K. Weierstrass, ed essi sono solo parzialmente registrati nelle note in apertura al trattato.

Per quanto concerne la redazione dell'apparato di *Annotazioni*, è da rilevare, fra l'altro, come siano solo in parte veritiere le lamentele espresse da Genocchi ai contemporanei (v. sopra), che sosteneva di non esser stato preventivamente consultato sul contenuto di queste note. Le poche lettere inviategli da Peano permettono infatti non solo di mostrare che i contenuti delle annotazioni ai numeri 44-45, 55 e 62 erano stati sommariamente comunicati,<sup>6</sup> ma anche che lo studio critico intrapreso da Peano in quei mesi aveva coinvolto altri illustri analisti, quali A. Harnak, M.

<sup>1</sup> A questi temi Genocchi dedica una lezione e mezza su 68, mentre Peano tre lezioni su 65 (cfr. *Registro ... 1883-84*, FGP, ms. SS, c. 5v, lezioni del 17.4.1884 e 19.4.1884 e *Registro ... 1885-86*, FGP, ms. SS, cc. 4v-5r, lezioni del 27.3.1886, 30.3.1886 e 1.4.1886).

<sup>2</sup> Mentre le funzioni interpolari non sono presentate nelle lezioni tenute da Genocchi, Peano vi dedica due lezioni (cfr. *Registro ... 1883-84*, FGP, ms. SS, c. 2r, lezioni del 15.12.1883 e 18.12.1883).

<sup>3</sup> Genocchi dedica a questo tema le lezioni del 11.3.1884, del 13.3.1884 e parte della lezione del 18.3.1884, Peano tratta gli integrali impropri nella sola lezione del 16.3.1886 (cfr. *Registro ... 1883-84*, FGP, ms. SS, c. 4v, e *Registro ... 1885-86*, FGP, ms. SS, c. 4r).

<sup>4</sup> Cfr. *Registro ... 1883-84*, FGP, ms. SS, cc. 4v-5r, lezioni del 22.3.1884, 27.3.1884 e 29.3.1884.

<sup>5</sup> Cfr. FGP, *marginalia* PEANO 1884c, p. 54.

<sup>6</sup> Cfr. G. Peano a A. Genocchi, Torino 7.10.1882, G. Peano a A. Genocchi, s.l., s.d. [settembre 1884], G. Peano a A. Genocchi, s.l., s.d. [settembre 1884], in BORGATO 1991, pp. 85-86, 88-92.

Pasch e C. Jordan, di cui Peano acclude a Genocchi le lettere. Purtroppo, non restando traccia a Piacenza di queste missive, non è possibile ricostruire il contenuto dei singoli interventi.<sup>1</sup>

A sancire la fama ed il successo del *Genocchi-Peano* sono proprio i contributi originali di Peano, fra cui troviamo le condizioni per lo sviluppo di una funzione di più variabili in serie di Taylor con espressione esplicita del resto, il teorema sulla continuità uniforme per le funzioni di più variabili, le condizioni di esistenza e derivabilità delle funzioni implicite, l'integrazione delle funzioni razionali con zeri del denominatore non noti, la presentazione rigorosa dei teoremi sui limiti, l'espressione analitica della funzione di Dirichlet e la definizione dell'integrale definito come estremo superiore ed inferiore di somme finite.

Numerose sono le note di tipo critico, in cui Peano riscontra e denuncia lacune ed inesattezze presenti in una folta messe di manuali spesso stereotipati uno dall'altro: dieci sono gli errori rilevati nei trattati di J. Serret, cinque in quelli di C. Jordan e di J. Bertrand, quattro nel testo di C. Sturm, due in quelli di P. Gilbert, I. Todhunter e G. Novi, mentre un solo errore è segnalato nei volumi di O. Rausenberger, L. Olivier, J. König, E. Amigues, C. Hermite, O. Schlömilch, L. Königsberger.<sup>2</sup>

È particolarmente severa la critica esercitata da Peano nei confronti del *Cours de Calcul différentiel et intégral* (1879) di Serret, un testo considerato di alto livello all'epoca e che riscosse un notevole successo, con sei edizioni fra il 1868 e il 1911.<sup>3</sup> Il matematico cuneese scorge in esso alcune asserzioni gratuite, scaturite dalla mancata introduzione dell'assiomatica dei numeri reali, e segnala errori nella trattazione della continuità e derivabilità delle funzioni, nei criteri di convergenza delle serie, nella stima dell'errore nelle tavole d'interpolazione dei logaritmi, nella determinazione del resto della formula di Taylor per funzioni di più variabili, e così via.<sup>4</sup>

Celebri però, *in primis*, risultano i controesempi, efficaci e ben scelti, conati con l'obiettivo di mostrare la fallacia di risultati accolti fino ad allora senza riserve. L'esempio di una funzione le cui derivate parziali seconde miste non commutano, quello di una funzione di due variabili, continua su ogni retta del piano ma non in tutto il piano, e quello sui massimi e minimi delle funzioni di due variabili sono divenuti ormai classici nella letteratura matematica e sanciscono, come rileva Glaeser, con la loro «intrusione», un cambiamento radicale nelle abitudini mentali dei ma-

<sup>1</sup> G. Peano a A. Genocchi, Torino 4.10.1884; G. Peano a C. Jordan, Torino 16.2.1884, in BORGATO 1991, pp. 88, 93-95.

<sup>2</sup> Cfr. PEANO 1884c, pp. VIII, XI, XIV, XV, XVI, XVII, XVIII, XXIII, XXV, XXVII, XXVIII, XXIX, XXX.

<sup>3</sup> Cfr. ZERNER 1986, p. 13, ZERNER 1994, pp. 10, 67-68.

<sup>4</sup> Cfr. PEANO 1884c, pp. VIII, XIV, XVI, XXIII, XXV, XXVII, XXIX.



tematici, a partire dalla fine dell'Ottocento.<sup>1</sup> In tal senso, è invece rimasto finora taciuto il suggestivo legame fra questi controesempi e la scoperta della curva che riempie un quadrato. Quello che è unanimemente ritenuto uno dei più celebri risultati ottenuti da Peano nel campo analitico è infatti considerato anch'esso dal matematico piemontese un controesempio, elaborato con l'intenzione di chiarificare il concetto di dimensione, dopo aver riscontrato alcune inesattezze in merito nei trattati di geometria.<sup>2</sup>

Se è vero che, nella forma e nella sostanza, l'insegnamento di Genocchi e quello di Peano sono separati da un solco marcato, occorre in conclusione sottolineare come sia ravvisabile una forte eredità culturale del maestro sul giovane allievo, sia sul versante della ricerca che della didattica. L'accento di Genocchi sull'importanza di porre rigorosamente i concetti fondamentali dell'analisi, perseguendo la semplicità dei procedimenti e la chiarezza di esposizione diventano infatti il *leitmotiv* della docenza di Peano. La sensibilità di Genocchi per l'inquadramento storico dei concetti trova largo riscontro nell'operato del matematico cuneese che, secondo la testimonianza di M. Gliozzi e di G. Vacca, conduceva l'insegnamento «con metodo storico»,<sup>3</sup> costellava di riferimenti storico-bibliografici i suoi lavori e non esitava a criticare quei trattati di analisi, che attribuivano 'a casaccio' la paternità dei teoremi, come ad esempio il testo di H. Lebesgue.<sup>4</sup>

Infine, nell'attività di ricerca, intesa da entrambe come arricchimento e riflesso del loro insegnamento, Genocchi e Peano sono accomunati dalla consonanza dei temi, dall'attitudine critica e dalla metodologia di lavoro, tanto che le parole usate da D'Ovidio per caratterizzare la produzione scientifica del primo potrebbero descrivere con ugual aderenza quella di Peano:

[Genocchi] soleva ritornar sovente sopra un medesimo soggetto; tanto più che molti de' suoi lavori, abbondando di commenti agli altrui e di svariate osservazioni, mal si prestano ad esser riassunti senza che perdano troppo della propria

<sup>1</sup> G. Glaeser a P. Dugac, 10.2.1992 in DUGAC 2003, p. 330.

<sup>2</sup> Scrive infatti Peano nel curriculum edito a Torino, *Pubblicazioni di G. Peano Prof. ord. di Calcolo infinitesimale nella R. Università di Torino*, 1916e, p. 4: «Sur une courbe qui remplit toute une aire plane [...]». In realtà, lo scopo del lavoro è molto modesto; esso si propone, al pari dei lavori N. 28 [*Sopra alcune curve singolari*], 39 [*Esempi di funzioni sempre crescenti e discontinue in ogni intervallo*], ecc. di indicare degli errori che si trovavano in alcuni libri.»

<sup>3</sup> MARIO GLIOZZI, *Giuseppe Peano (27 agosto 1858-20 aprile 1932)*, «Archeion», XIV, 1932, p. 255; GIOVANNI VACCA, *Lo studio dei classici negli scritti matematici di Giuseppe Peano*, «Atti della Società Italiana per il Progresso delle Scienze», XXII, 9-15.10.1932, II, 1933, pp. 97-99.

<sup>4</sup> Cfr. la lettera di G. Peano a G. Vitali, Torino 3.4.1905, in MARIA TERESA BORGATO, LUIGI PEPE, *Opere sull'analisi reale e complessa*, Carteggio, Bologna, Cremonese, 1984, p. 453.

fisionomia. [...] Non vi è forse scrittura del Genocchi, nella quale non sia corretto qualche errore, chiarito qualche punto di storia della scienza, giudicata qualche questione di priorità. Non poche sono interamente dedicate ad argomenti di critica, e sono modelli di acuto ragionare, di coscienziosa ricerca storica, di vasta e sicura erudizione.<sup>1</sup>

#### 4. L'INFLUENZA DEL TRATTATO DEL 1884 SULLA PRODUZIONE DI PEANO

Se è indubbio che nel *Genocchi-Peano* confluiscono in larga misura le ricerche analitiche del giovane Peano, e in particolar modo i contenuti delle sue note sull'integrabilità delle funzioni<sup>2</sup> e sulle funzioni interpolari,<sup>3</sup> meno palese appare invece il legame con un cospicuo gruppo di lavori successivi. Fra questi possiamo citare le note sui determinanti Jacobiani<sup>4</sup> e quelle sul resto nella formula di Taylor, oggi detto «resto di Peano», enunciato nel trattato del 1884, dimostrato nelle *Applicazioni geometriche* del 1887 e infine pubblicato su una rivista scientifica nel 1889.<sup>5</sup> I contributi di Peano a questo proposito non ricevono subito grande accoglienza, tanto che, recensendo il monumentale *Traité d'Analyse* di H. Laurent, Peano lamenta che il matematico francese «insieme a tutti gli autori» abbia riportato sotto il nome di teorema di Bertrand la proposizione sui determinanti Jacobiani, la cui inesattezza egli aveva già rilevato fin dal *Genocchi-Peano* e abbia continuato a dimostrare la formula di Taylor supponendo la continuità della derivata  $n$ -esima.<sup>6</sup>

La nota di Peano del 1895 sulla definizione di integrale nasce invece da un appunto mosso da Giulio Ascoli ad uno dei riferimenti storico-bibliografici del trattato del 1884.<sup>7</sup> Nell'annotazione al paragrafo 193 si attribuiva infatti a Volterra la definizione dell'integrale basata sui concetti di limite superiore ed inferiore delle somme integrali: un contributo di cui Ascoli rivendica la paternità.<sup>8</sup>

Sono però soprattutto alcune riflessioni sui concetti fondamentali del Calcolo infinitesimale, e in particolar modo su quelli di limite, di deriva-

<sup>1</sup> ENRICO D'OVIDIO, *Onoranze ad A. Genocchi*, cit., 1892, pp. 1099, 1101.

<sup>2</sup> GIUSEPPE PEANO, *Sull'integrabilità delle funzioni*, 1882b; PEANO 1884c, pp. xxxi, 298-300.

<sup>3</sup> GIUSEPPE PEANO, *Sulle funzioni interpolari*, 1882c; PEANO 1884c, pp. xx-xxii, 90-95.

<sup>4</sup> PEANO 1884c, pp. xvi-xxvii, 170-173; GIUSEPPE PEANO, *Su d'una proposizione riferentesi ai determinanti jacobiani*, 1889f.

<sup>5</sup> PEANO 1884c, p. xix; GIUSEPPE PEANO, *Applicazioni geometriche del calcolo infinitesimale*, 1887b, p. 49; GIUSEPPE PEANO, *Une nouvelle forme du reste dans la formule de Taylor*, 1889e.

<sup>6</sup> Cfr. GIUSEPPE PEANO, *Osservazioni sul "Traité d'Analyse par Hermann Laurent"*, 1892e, pp. 31-32, 34.

<sup>7</sup> GIUSEPPE PEANO, *Sulla definizione di integrale*, 1895n.

<sup>8</sup> Cfr. PEANO 1884c, p. xxxi; GIULIO ASCOLI, *Sulla definizione di integrale*, «Annali di Matematica pura ed applicata», s. 2, 23, 1895, pp. 67-71.

ta e di differenziale, ad essere oggetto di successivi ampliamenti. Tali concetti sono studiati da Peano, fra il 1884 e il 1895, con l'obiettivo di tradurli in linguaggio ideografico, per inserirli nel *Formulario di Matematica*,<sup>1</sup> e successivamente essi vengono inglobati nelle ricerche sulla teoria della definizione. Nell'articolo *Le definizioni in matematica* Peano si interroga ad esempio sulla liceità di definizioni che, come quella di derivata fornita nel *Genocchi - Peano*, non garantiscono di per sé l'esistenza del definito, tanto da dover essere completate con opportune condizioni necessarie e sufficienti.<sup>2</sup>

Nel 1912-13 questi temi, contestualizzati dal punto di vista storico, diventeranno l'oggetto dell'intervento di Peano nel dibattito nazionale scaturito dall'introduzione di elementi di analisi nell'insegnamento secondario, ad opera di G. Castelnuovo. Precorrendo l'invito di E. Beke, che domanda:

comment, dans le pays de la critique mathématique où Dini, Genocchi et Peano ont traité les principes du Calcul infinitésimal d'une façon modèle, comment, dans ce pays, on présentera ces principes aux élèves<sup>3</sup>

Peano pubblica i saggi *Derivata e Differenziale* e *Sulla definizione di limite*.<sup>4</sup> Nel primo si interroga sui pregi della notazione differenziale, nel secondo presenta invece uno studio critico comparativo delle definizioni di limite nella manualistica secondaria e universitaria, commentando le trattazioni di R.-L. Baire, E. Cesàro, F. D'Arcais, C. Arzelà, U. Grassi, J. Serret, J.-M. Duhamel, A.-L. Cauchy, E. Borel, J. Tannery, R. Sturm, E. Catalan e H. Fine, e conclude con queste significative parole:

Confrontando i programmi proposti per le scuole italiane, con quelli francesi, del 31 maggio 1902, giudico migliori i nostri perché più liberali. Nei programmi francesi è quasi imposto il metodo di insegnamento. [...] Se l'insegnante delle scuole medie impiega la sua prima lezione a sviluppare tutto il formalismo della logica matematica, avrà uno strumento per spiegare in modo semplicissimo queste complicazioni. Altrimenti io temo che l'introduzione del limite delle funzioni (invece di quello delle classi) riproduca nelle scuole medie quella se-

<sup>1</sup> Cfr. GIUSEPPE PEANO, *Sulla definizione del limite d'una funzione*, 1892l; *Sur la définition de la dérivée*, 1892s; *Estensione di alcuni teoremi di Cauchy sui limiti*, 1895a; *Sur la définition de la limite d'une fonction. Exercice de logique mathématique*, 1895c.

<sup>2</sup> Cfr. PEANO 1884c, p. XIV e GIUSEPPE PEANO, *Le definizioni in matematica*, 1911d, p. 54: «Dalla definizione ordinaria: "Derivata d'una funzione è il limite del suo rapporto incrementale", risulta che la derivata esiste o non, secondo che esiste o non questo limite. Alcuni autori, per voler essere più rigorosi, dicono: "Derivata è il limite, ove esista, del rapporto incrementale", e allora se il limite non esiste, non si può più concludere che la derivata non esiste.»

<sup>3</sup> EMANUEL BEKE, *Les résultats obtenus dans l'introduction du calcul différentiel et intégral dans les classes supérieures des établissements secondaires, Rapport général*, *L'Enseignement mathématique*, 16, 1914, p. 255.

<sup>4</sup> GIUSEPPE PEANO, *Derivata e differenziale*, 1913a; *Sulla definizione di limite*, 1913e.

rie di confusioni, di cui si è a stento (e non completamente) liberato il Calcolo infinitesimale odierno.<sup>1</sup>

Un'ulteriore allusione inserita nel *Genocchi-Peano* riguarda la teoria dei «modi di diventare di una funzione» o «teoria dei fini», e i suoi legami con la ricerca dell'ordine di infinità delle funzioni, adombrati nelle annotazioni di apertura del trattato:

Del resto il *modo di diventare* d'una funzione  $f(x)$  è un ente, che si può introdurre in matematica [...]. Invero, potremo definire di questi enti l'eguaglianza e disuguaglianza, e le operazioni analitiche fondamentali. [...] Potremo assumere le seguenti definizioni: Diremo che, col crescere indefinitamente di  $x$ ,  $f(x)$  diventa maggiore o eguale o minore di  $\varphi(x)$ , se da un certo valore di  $x$  in poi  $f(x)$  è maggiore o eguale o minore di  $\varphi(x)$ . La  $\varphi(x)$  potrebbe anche ridursi ad un numero costante, ed allora resta definita l'eguaglianza o disuguaglianza del modo di diventare di  $f(x)$  e di un numero.<sup>2</sup>

Tale trattazione sarà approfondita nel 1910 sia sotto il profilo della ricerca, che nei suoi risvolti didattici, e sarà proposta da Peano al suo allievo Vincenzo Mago come tema di dissertazione di laurea.<sup>3</sup>

Nel trattato dell'84 si possono rintracciare, infine, i germi dell'interesse del matematico cuneese per le approssimazioni numeriche e per le formule di interpolazione.<sup>4</sup> Anch'essi sono scaturiti dall'insegnamento di Genocchi, noto anche in ambito internazionale per le sue ricerche in teoria dei numeri,<sup>5</sup> e si sono alimentati con la lettura dei lavori di G. Bellavitis, H. Schwarz, J. Bertrand e T. Stieltjes. Questo tipo di ricerche si è poi ampliato con la stesura del volume di *Applicazioni geometriche del calcolo infinitesimale* ed è giunto a maturazione molti anni più tardi, in relazione all'attività di Peano nell'ambito delle Conferenze Matematiche Torinesi.<sup>6</sup>

<sup>1</sup> GIUSEPPE PEANO, *Sulla definizione di limite*, 1913e, pp. 771, 772.

<sup>2</sup> PEANO 1884c, pp. IX-X.

<sup>3</sup> Cfr. GIUSEPPE PEANO, *Sugli ordini degli infiniti*, 1910b, p. 780: «Così si è condotti ad unire ad ogni funzione un nuovo ente, che rappresenta l'ultimo modo di comportarsi della funzione, e che, in mancanza di termine più appropriato, dirò suo *fine*, e che si definisce per astrazione come segue. Il fine d'una funzione avente il valore costante  $a$  è questa costante. Il fine d'una funzione  $f$  è maggiore, o eguale, o minore del fine d'una funzione  $g$ , se si può determinare un indice  $m$ , tale che per ogni indice  $x$  da  $m$  in poi, sempre si abbia  $fx > gx$ , o  $fx = gx$ , o  $fx < gx$ . [...] Ad ogni successione  $f$  corrisponde allora un nuovo ente, suo fine [...]» Sul concetto di fine cfr. anche GIUSEPPE PEANO, *Le definizioni per astrazione*, 1915k, p. 116; *Relazione sulla memoria del Dr. Vincenzo Mago: Teoria degli ordini*, 1914a e VINCENZO MAGO, *Teoria degli ordini*, «Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino», s. 2, 64, 1914, N. 8, pp. 1-25.

<sup>4</sup> Cfr. PEANO 1884c, pp. XX-XXIII, 90-103.

<sup>5</sup> Cfr. CARLO VIOLA, *Alcuni aspetti dell'opera di Angelo Genocchi riguardanti la teoria dei numeri*, in CONTE, GIACARDI 1991, pp. 11-29.

<sup>6</sup> Gli ultimi risultati matematici di Peano in questi campi risalgono agli anni 1913-1918 e furono oggetto di successive generalizzazioni ad opera di E. J. Rémès, J. Radon, F. Riesz, A. Sard, A. Ghizzetti e A. Ossicini. Cfr. ROERO 2004, p. 142.

# 5. LA RICEZIONE DEL GENOCCHI-PEANO E LA SUA COLLOCAZIONE NEL CONTESTO EUROPEO

Il *Genocchi-Peano* riscuote da subito un ottimo successo editoriale, avvalorato dalle traduzioni nelle lingue tedesca (1899) e russa (1903 e 1922),<sup>1</sup> dalle numerose recensioni elogiative,<sup>2</sup> dalle varie citazioni in articoli di ricerca<sup>3</sup> e dalla sua presenza nelle maggiori biblioteche.

Nella recensione apparsa sul «Bulletin des Sciences Mathématiques», Amédée Paraf<sup>4</sup> sottolinea con particolar enfasi lo «spirito moderno» con cui è stato redatto il trattato, che egli auspica destinato ad influenzare positivamente la didattica dell'analisi a livello internazionale. Paraf rileva

<sup>1</sup> ANGELO GENOCCHI, *Differentialrechnung und Grundzüge der Integralrechnung*, herausgegeben von Giuseppe Peano, 1899; *Differencial'noe ischislenie i osnovy integral'nago ischislenija*, izdannyya prof. Giuseppe Peano, 1903; *Differencial'noe ischislenie i nachala integral'nogo ischislenija*, izdannoe s dopolnenijami i primechanijami prof. Džh. Peano, 1922.

<sup>2</sup> AMÉDÉE PARAF, *Angelo Genocchi. Calcolo differenziale e principii di calcolo integrale ...*, «Bulletin des Sciences Mathématiques», 2, IX, 1885, pp. 170-172; OTTO STOLZ, *Angelo Genocchi. Calcolo differenziale e principii di calcolo integrale ...*, «Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik», 16, 1884, pp. 223-224; EMIL LAMPE, *Genocchi Angelo, Differentialrechnung und Grundzüge der Integralrechnung*, herausgegeben von Giuseppe Peano ..., «Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik», 29, 1898, pp. 227-228; «Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik», 30, 1899, pp. 260-261; GINO LORIA, *Angelo Genocchi, Differentialrechnung und Grundzüge der Integralrechnung*, herausgegeben von Giuseppe Peano ..., «Bollettino di Bibliografia e Storia delle Scienze Matematiche», II, 1899, pp. 123-124.

<sup>3</sup> Fra gli autori che trassero spunti dal *Genocchi-Peano* in edizione italiana o tedesca per le loro ricerche di analisi si possono citare: L. SCHEFFER, *Theorie der Maxima und Minima einer Function von zwei Variabeln*, «Mathematische Annalen», 35, 1890, pp. 546, 557, 572-576; W. OSGOOD, *The law of the mean and the limits  $\frac{0}{0}$ ,  $\frac{\infty}{\infty}$* , «The Annals of Mathematics», 12, 1898, p. 70; W. OSGOOD, *Sufficient conditions in the Calculus of Variations*, «The Annals of Mathematics», 2, 2, 1900, p. 114; O. BOLZA, *Lectures on the calculus of variations*, Chicago, University Press, 1904, p. xi; E. HEDRICK, *A peculiar example in minima of surfaces*, «The Annals of Mathematics», 2, 8, 1907, p. 172; A. MILLER, *Note on the definitions of a variable*, «The American Mathematical Monthly», XIV, 1907, p. 214; A. EMCH, *Geometric Properties of the Jacobians of a Certain System of Functions*, «The Annals of Mathematics», 2, 15, 1913, p. 136; W. OSGOOD, *On functions of several complex variables*, «Transactions of the American Mathematical Society», 17, 1, 1916, p. 3; H. HANCOCK, *Theory of maxima and minima*, Boston, USA, 1917, p. v; A. EMCH, *A model for the Peano surface*, «The American Mathematical Monthly», 29, 10, 1922, pp. 388-391; H. S. CARSLAW, *The differentiation of a function of a function*, «The Mathematical Gazette», 12, 170, 1924, p. 93; P. v. SZÁSZ, *Über einen Mittelwertssatz*, «Mathematische Zeitschrift», 25, 1926, p. 119.

<sup>4</sup> Curiosi sono i commenti di Genocchi relativi a questa recensione: A. Genocchi a P. Tardy, Torino 25.7.1885, BUG, busta 12/106, c. 2r: «Nel Bulletin Darboux (pag. 170) un articolo piuttosto laudativo parla del mio Corso pubblicato con aggiunte del D<sup>e</sup> Peano, ed è firmato A. Paraf. Chi si nasconde mai sotto questa cifra per me indecifrabile?»; P. Tardy a A. Genocchi, San Marcello Pistoiese 12.8.1885, FGP, ms. EE, c. 2r: «Non ricevendo qui il Bullettino di Darboux non ho visto l'articolo sul volume del Peano né capisco da quella cifra chi possa esserne l'autore»; A. Genocchi a P. Tardy, Torino 24.8.1885, BUG, busta 12/107, c. 2r: «Un telegramma di Aristide Marra annunciava al Boncompagni che A. Paraf sottoscritto ad un articolo del Bulletin Darboux è Amédée Paraf della Ecole Normale Supérieure di Parigi. È dunque un nome vero; ma ignoro che qualità abbia nella scuola N. S.»

l'importanza dell'introduzione della teoria di Dedekind e dei paragrafi sui limiti superiore ed inferiore, e segnala un unico neo nel mancato inserimento dei classici teoremi sui limiti della somma e del rapporto degli infinitesimi: un'obiezione, questa, cui Peano risponderà implicitamente nel 1891, recensendo il volume di *Calcolo infinitesimale* di F. D'Arcais:

La parte II, *Infinitesimi*, contiene, fra l'altro, i due noti principii fondamentali sui rapporti e sulle somme di infinitesimi [...]. Ma a questo proposito mi sia permesso di osservare che il primo, quello riferentesi al rapporto di infinitesimi, è di applicazione così ovvia, che parmi non necessario venga espressamente menzionato; il secondo poi [...] è dalla massima parte dei trattati enunciato sotto forma inesatta.<sup>1</sup>

L'obiezione di Paraf ha portata molto più ampia di quanto si potrebbe a tutta prima supporre: proprio la presenza del principio di sostituzione per gli infinitesimi è infatti uno dei parametri che stigmatizzano il passaggio fra i manuali di analisi 'di seconda generazione' – cui appartengono i testi di J.-M. Duhamel, J. Serret e C. Sturm – e quelli della 'terza', redatti da J. Tannery e E. Goursat.<sup>2</sup> La scelta di sorvolare sul principio di sostituzione, unitamente all'attenzione per i fondamenti dell'analisi e per la costruzione dei numeri irrazionali basterebbero quindi da sole a rendere il *Genocchi - Peano* un testo all'avanguardia in campo internazionale.

Secondo il giudizio espresso da A. Voss e A. Pringsheim nell'*Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften*, il *Genocchi - Peano* è uno dei diciannove trattati che maggiormente hanno contribuito al rinnovamento dell'insegnamento dell'analisi a livello universitario.<sup>3</sup> Peano stesso, nel 1916, elenca le principali novità contenutistiche del trattato, già rilevate nell'*Enzyklopädie* e successivamente ribadite da A. Mayer,<sup>4</sup> e non esita ad asserire che il *Genocchi - Peano* è «citato in tutti i libri di *Calcolo* che contengono alcune righe di bibliografia».<sup>5</sup>

<sup>1</sup> GIUSEPPE PEANO, *Francesco D'Arcais, Corso di Calcolo infinitesimale*, 1891c, p. 19.

<sup>2</sup> ZERNER 1986, pp. 10-13 e ZERNER 1994, pp. 7-14.

<sup>3</sup> Cfr. ALFRED PRINGSHEIM 1898, pp. 2, 26, 48, 49; VOSS 1898, pp. 66, 72, 73, 77, 83, 92.

<sup>4</sup> ADOLPH MAYER, *Vorwort*, in PEANO 1899t, pp. III-IV.

<sup>5</sup> GIUSEPPE PEANO, *Pubblicazioni di G. Peano ...*, cit., 1916e, p. 1. Fra i manuali in cui è espressamente menzionato il *Genocchi - Peano* possiamo ad esempio citare: FRANCESCO D'ARCAIS, *Corso di Calcolo Infinitesimale*, I, Padova, Draghi, 1891, p. v; FRANCESCO D'ARCAIS, *Corso di Calcolo Infinitesimale*, 2ª ed. con aggiunte e modificazioni, I, Padova, Draghi, 1899, p. v; CESARE ARZELÀ, *Lezioni di Calcolo Infinitesimale date nella R. Università di Bologna*, I, §1, Firenze, Le Monnier, 1901, p. IV; ERNESTO CESÀRO, *Elementi di Calcolo Infinitesimale*, 2ª ed., Napoli, Alvano, 1905, pagina non numerata; PAUL MANSION, *Résumé du cours d'analyse infinitésimale de l'Université de Gand, Calcul différentiel et Principes de Calcul intégral*, Paris, Gauthier-Villars, 1887, p. VIII; OTTO STOLZ, *Grundzüge der Differential-und Integralrechnung*, Leipzig, Teubner, 1893, pp. III, IX, 45, 91, 134, 146, 226, 294, 458.

Pur senza addentrarci in un'indagine sistematica, per lumeggiare l'influenza esercitata da questo trattato sulla manualistica successiva, risultano significative le parole con cui D'Arcais dichiara le sue fonti d'ispirazione:

Le opere che più mi furono utili [...] sono: in primo luogo le *Lezioni di Analisi Infinitesimale* (litografia) e *Fondamenti per la teoria delle funzioni di variabili reali* del nostro illustre professore Ulisse Dini, opere [...] alle quali deve necessariamente ricorrere chi si accinge a scrivere un libro di analisi; il *Calcolo differenziale e principî di Calcolo integrale* del prof. Genocchi pubblicato con molte aggiunte e proprie considerazioni dal Prof. G. Peano, e *Die Elemente der Differential und Integralrechnung* di Axel Harnack, i quali due ultimi lavori, unitamente a quello del Lipschitz, segnarono ancor essi un progresso nei metodi coi quali devonsi trattare le ricerche spettanti al calcolo infinitesimale.<sup>1</sup>

Analogamente, in Belgio, P. Mansion così ribadisce l'influenza ricevuta nella redazione delle dispense del suo corso di analisi all'Università di Gand:

Pour rédiger ce livre, nous avons consulté la plupart des bons Traités d'Analyse infinitésimale. [...] Mais nous devons signaler spécialement, parmi les écrits qui nous ont servi de guide, les manuels de Cauchy et de Duhamel, le *Lehrbuch der Analysis* de M. Lipschitz, et, à partir du n° 214, le *Cours* de MM. Genocchi et Peano.<sup>2</sup>

Sul fronte della ricerca, lo studio dei limiti delle forme indeterminate è ripreso da W. Osgood,<sup>3</sup> mentre H. Hancock riceve dal *Genocchi - Peano* lo stimolo per le nuove teorie sugli estremali delle funzioni di più variabili reali, sviluppate da G. Scheffers, dallo stesso Stoltz e da V. Dantscher.<sup>4</sup>

Nei Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo appare inoltre, a firma di A. Capelli, la relazione sul *Genocchi - Peano*, in cui si sottolinea il retaggio positivo avuto dalla polemica fra Peano e Gilbert sul trattato stesso:

[Peano] fa in particolare delle osservazioni sull'importanza dell'enunciato, più generale del consueto, di un teorema fondamentale del calcolo, che ha dato luogo ad una recente polemica. (*Nouvelles Annales des Math.* 3<sup>ème</sup> serie, vol. III. 1884) [...]. Fa notare come in questo enunciato, che non suppone necessariamente la *continuità* delle derivate, si deve però intendere che ammetta  $f(x)$  dappertutto una derivata *ordinaria*. Con ciò restano escluse per le derivate le discontinuità così dette di prima specie; cioè il teorema si applica ad ogni funzione continua

<sup>1</sup> FRANCESCO D'ARCAIS, *Corso di Calcolo Infinitesimale*, cit., 1891, p. v.

<sup>2</sup> PAUL MANSION, *Résumé*... cit, 1887, p. VIII. Egli, di fatto, utilizza il trattato del 1884 nell'esposizione della teoria dei massimi e minimi di funzioni di due variabili, dei determinanti funzionali, nello studio delle forme indeterminate, e così via (cfr. § 217, 226, 280, 303). Mansion aveva subito manifestato il proposito di studiare con attenzione il *Genocchi - Peano* e di utilizzarlo per la redazione del suo *Corso*. Cfr. P. Mansion a A. Genocchi, Anvers 17.10.1884 e Gand 28.10.1884, in CASSINA 1952, pp. 349-350.

<sup>3</sup> Cfr. WILLIAM OSGOOD, *The law of the mean and the limits*  $\frac{0}{0}$ ,  $\frac{\infty}{\infty}$ , cit., 1898, p. 70.

<sup>4</sup> Cfr. HARRIS HANCOCK, *Theory of maxima and minima*, cit., 1917, p. v.

$f(x)$  avente una derivata continua od anche affetta da discontinuità di seconda specie. Indica alcune applicazioni di questo teorema.<sup>1</sup>

A fianco dei giudizi positivi finora visti, si registrano tuttavia altri commenti non del tutto favorevoli. Hermite, ad esempio, nella sua corrispondenza con Genocchi esprime la convinzione che non si debba «concedere tanto al rigore» in sede di insegnamento elementare e afferma che mai «perderebbe tempo» a lezione per esporre le complicate dimostrazioni sulle funzioni discontinue di Darboux o per provare la non commutabilità delle derivate parziali seconde miste.<sup>2</sup> La valutazione dei contenuti del *Genocchi-Peano* oscilla in effetti fra chi, come B. Levi, ritiene che siano troppo ristretti<sup>3</sup> e chi, come G. Loria, è convinto del contrario.<sup>4</sup> Questa valutazione di Loria è peraltro stata recentemente sposata da M. Zerner, che ritiene i *Fondamenti* del Dini e il *Genocchi-Peano* trattati di fondamenti della teoria delle funzioni di variabile reale, piuttosto che veri corsi di analisi infinitesimale.<sup>5</sup>

Analoga disparità di giudizi sarà espressa a proposito delle *Applicazioni geometriche*<sup>6</sup> e delle *Lezioni di Analisi Infinitesimale*<sup>7</sup> di Peano, e deriva

<sup>1</sup> Seduta del 4.12.1884, *Rivista bibliografica*: ALFREDO CAPELLI, *Sul Trattato di Calcolo differenziale etc. di Angelo Genocchi pubblicato con aggiunte dal Dr. Giuseppe Peano (Torino, 1884)*, «Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo», I, 1884-1887, pp. 11-12. Tale relazione è segnalata in FCP, *marginalia* PEANO 1884c, apposto sul risvolto di copertina.

<sup>2</sup> C. Hermite a A. Genocchi, Paris 31.10.1884 in CASSINA 1952, pp. 348-349 e MICHELACCI 2005, pp. 180-181.

<sup>3</sup> LEVI 1932, p. 256 e 1955, p. 14: «[fu un] volume che [...] ebbe dal Peano, mediante chiose critiche e storiche, mediante esempi ed altre aggiunte, un carattere personale: pel quale, pur contenuto in un programma che, lungi dall'avvicinarsi all'ampiezza dei classici trattati del Serret, del Jordan, del Dini, può considerarsi ristretto anche per un nostro odierno Corso universitario, passò presto fra i classici di quel periodo critico [...]».

<sup>4</sup> GINO LORIA, *Angelo Genocchi*..., cit., 1899, p. 124: «Non si tratta di un manuale nel senso ordinario [...], specialmente non si tratta di un manuale per principianti, che non hanno preparazione sufficiente ad un completo rigore. Ciò non ostante, lo stile limpido in cui il libro è scritto farà sì che chiunque sia familiare cogli elementi dell'analisi, potrà leggerlo agevolmente e trarne perenne utilità e non comune piacere.»

<sup>5</sup> Cfr. ZERNER 1994, p. 17.

<sup>6</sup> Cfr. *Relazione della Commissione incaricata di giudicare sul concorso alla cattedra di professore straordinario di calcolo infinitesimale nella R. Università di Torino*, «Bollettino ufficiale dell'Istruzione», a. XVIII, 16, 16.4.1891, p. 428: «Il trattato delle applicazioni geometriche del calcolo infinitesimale è inferiore a molte opere sullo stesso argomento uscite prima e contemporaneamente al lavoro del Peano, avendo l'autore tralasciato molti dei più importanti capitoli della geometria differenziale, forse perché troppo preoccupato del metodo che ha voluto usare (il calcolo dei segmenti) metodo che non sarebbe opportuno introdurre nell'insegnamento in sostituzione di quelli classici»; JULES TANNERY, G. Peano, *Applicazioni geometriche del calcolo infinitesimale*, «Bulletin des Sciences Mathématiques», 2, 11, 1887, p. 237: «L'auteur de ces *Applications géométriques du Calcul différentiel* a moins cherché à accumuler dans son Livre des faits mathématiques qu'à éclaircir les définitions et à donner des notions à la fois générales et précises: il est, à cet égard, intéressant et satisfaisant; au surplus, la publication antérieure du Livre intitulé: *Calcolo differenziale e principii di Calcolo integrale*, [...] avait déjà montré quelles étaient ses préoccupations.»

<sup>7</sup> Le *Lezioni di Analisi* redatte da Peano per gli allievi dell'Accademia Militare sono considera-



dalla sintomatica attitudine del matematico piemontese a considerare il libro di testo come uno strumento di formazione autonoma, che da un lato confida nella mediazione didattica del docente, e dall'altro esige autonomia di studio da parte dell'allievo.

La fortuna del *Genocchi-Peano* è ampiamente dovuta al suo taglio innovativo rispetto ad altri celebri testi di analisi dell'epoca. L'innovazione di maggior rilievo che esso presenta è da individuarsi nell'ampio spazio dedicato ai fondamenti del Calcolo, e in particolar modo ai risultati della scuola tedesca.

È sufficiente scorrere l'indice analitico del trattato del 1884 per percepire il rinnovo del suo impianto strutturale: mentre nei *Cours* di Camille Jordan<sup>1</sup> o di Joseph Serret<sup>2</sup> i principi del Calcolo si riducevano all'esposizione dei teoremi sugli infinitesimi, Peano affronta dettagliatamente temi come la costruzione dei numeri reali, l'esistenza del limite superiore, i teoremi sui limiti e sulle successioni di reali, la convergenza uniforme e così via. Diverso è anche il peso attribuito alla continuità e allo studio di funzioni. Mentre nei trattati – soprattutto in quelli francesi – apparsi fra il 1870 e il 1886, come quelli di J. Hoüel<sup>3</sup> e di C. Hermite,<sup>4</sup> la continuità è un tema poco o niente studiato, sulla scia di Genocchi e di Dini, Peano dimostra, con dovizia di dettagli, le proprietà fondamentali delle funzioni continue, fra cui il teorema dei valori intermedi. Né manca, nelle note di apertura del volume, un cenno agli studi fondamentali condotti da G. Darboux,<sup>5</sup> largamente ignorati da parte degli analisti francesi contemporanei.

L'attenzione per i fondamenti dell'analisi si riverbera poi in alcuni aspetti tecnici, e giustifica le critiche rivolte da Peano a Jordan, Serret e Sturm, per le imprecisioni relative all'esistenza della derivata, alla dimostrazione del teorema fondamentale del calcolo integrale e alle condizioni di validità della formula di Taylor.<sup>6</sup>

te nell'*Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften* fra i diciannove trattati che maggiormente hanno influito sullo sviluppo del calcolo infinitesimale; da B. Levi sono invece considerate, come già il *Genocchi-Peano*, troppo schematiche (LEVI 1955, p. 9).

<sup>1</sup> CAMILLE JORDAN, *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique*, t. 1, *Calcul différentiel*, Paris, Gauthier-Villars, 1882, t. 2, *Calcul intégral*, Paris, Gauthier-Villars, 1883, t. 3, Paris, Gauthier-Villars, 1887.

<sup>2</sup> JOSEPH SERRET, *Cours de calcul différentiel et intégral*, Paris, Gauthier Villars, 1<sup>a</sup> ed. 1868, 2<sup>a</sup> ed., 1879.

<sup>3</sup> JULES HOÜEL, *Cours de calcul infinitésimal*, Paris, Gauthier Villars, 1878.

<sup>4</sup> CHARLES HERMITE, *Cours [de calcul infinitésimal] professé à la Faculté des Sciences pendant le 2. semestre*, 1881-1882, Paris, Gauthier Villars, 1882.

<sup>5</sup> GASTON DARBOUX, *Mémoire sur les fonctions discontinues*, «Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure», s. 2, IV, 1875, pp. 57-112.

<sup>6</sup> Cfr. PEANO 1884c, pp. XII-XIV, XVII-XIX, XXV-XXVI.

Il trattato dell'84 viene così ad inserirsi in un nuovo filone di manuali per l'insegnamento dell'analisi, avviato in Italia dalla pubblicazione in litografia dei *Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali* di U. Dini e contraddistinto da un taglio più rigoroso ed astratto. A livello europeo il *Genocchi-Peano* contribuirà a sua volta a sancire il decollo di questa tipologia di trattatistica, cui afferiscono, dopo il 1884, i corsi di analisi di Jules Tannery,<sup>1</sup> la seconda edizione del *Cours* di Camille Jordan<sup>2</sup> e i manuali di O. Stolz e P. Mansion.<sup>3</sup>

Simile per impostazione e metodologia al trattato di Dini, il *Genocchi-Peano* se ne discosta però a livello contenutistico, presentando solo una parte delle teorie svolte dal matematico pisano, senza quindi illustrare argomenti, come ad esempio le funzioni non derivabili di una variabile reale su un insieme di punti, che esulavano dai confini del corso di analisi tenuto tradizionalmente all'Università di Torino. Le fonti stesse consultate dai due autori sono differenti: per Dini è H.A. Schwarz *in primis* a costituire il tramite per la conoscenza dei risultati della scuola tedesca, mentre Peano è orientato prevalentemente dalla lettura degli scritti di A. Harnack e di P. Du Bois Reymond.<sup>4</sup>

Nonostante l'approccio assai moderno ai fondamenti dell'analisi, anche il *Genocchi-Peano* presenta tuttavia alcuni nei. Essi sono ravvisabili ad esempio nell'eccessiva concisione con cui sono introdotti i reali e nella presentazione dell'integrazione come operazione inversa della derivazione. Quest'approccio adottato da Peano in sede didattica appare antiquato, se si pensa che in Italia, negli stessi anni, Cesare Arzelà stava elaborando per questo tema una trattazione diversa e più articolata.<sup>5</sup>

<sup>1</sup> JULES TANNERY, *Introduction à la théorie des fonctions d'une variable*, Paris, Hermann, 1886.

<sup>2</sup> Mosso dall'intenzione di ovviare alle critiche mosse da Peano e da altri colleghi al suo *Cours* del 1882-1887, Jordan pubblicherà nel 1893 una nuova edizione del suo trattato interamente rivista ed emendata, nella quale ampio spazio è attribuito ai risultati sui fondamenti dell'analisi. Uno studio comparato delle due edizioni del *Cours* di Jordan è condotto in HÉLÈNE GISPERT, *Camille Jordan et les fondements de l'analyse. Comparaison de la 1<sup>re</sup> édition (1882-1887) et de la 2<sup>ème</sup> (1893) de son cours d'analyse de l'Ecole Polytechnique*, Paris, Université de Paris-Sud, 1982 («Publications mathématiques D'Orsay», 82-05).

<sup>3</sup> OTTO STOLZ, *Vorlesungen über allgemeine Arithmetik*, Leipzig, Teubner, 1885; PAUL MANSION, *Résumé du cours d'analyse infinitésimale de l'Université de Gand: Calcul différentiel et calcul intégral*, Paris, Gauthier Villars, 1887.

<sup>4</sup> Cfr. AXEL HARNACK, *Die Elemente der Differential und Integral Rechnung*, Leipzig, Teubner, 1881; PAUL DU BOIS-REYMOND, *Die allgemeine Functionentheorie. I. Teil. Metaphysik und Theorie der mathematischen Grundbegriffe: Grösse, Grenze, Argument und Function*, Tübingen, Laupp, 1882.

<sup>5</sup> Sui contributi di Arzelà a questo proposito cfr. VERONICA GAVAGNA, *Cesare Arzelà e l'insegnamento della matematica*, «Bollettino di Storia delle Scienze Matematiche», XII, 2, 1992, pp. 265-268.

6. I MARGINALIA DI PEANO AL TRATTATO DEL 1884  
E I RIFLESSI SULL'INSEGNAMENTO SUCCESSIVO

A partire del 1884 Peano progressivamente modifica la struttura dei suoi corsi, come si evince da un manoscritto di *Lezioni di Calcolo*, a cura degli studenti di Peano, non datate, ma ascrivibili agli anni 1885-1889.<sup>1</sup> Nell'anno accademico 1885-86 abbandona l'esposizione della teoria delle funzioni interpolari, introduce nell'insegnamento le formule di quadratura e i relativi resti e nel 1891, commentando alcuni paragrafi del *Genocchi-Peano*, confida a Cesàro:

Per alcuni anni diedi in iscuola questi teoremi sulle funzioni continue; ma da molto tempo non li espongo più (nel corso di Calcolo) limitandomi ad accennarli, ed ammetterli come precedentemente dimostrati quando ne ho bisogno. E faccio questo onde poter trattare più ampiamente altre questioni che paiono di maggiore importanza pratica. Ma se avessi da darli nuovamente, o pubblicare una nuova edizione del libro, cambierei tutte le dimostrazioni...<sup>2</sup>

La dinamica di queste modifiche trova riscontro nell'analisi dei contenuti inseriti nel trattato del 1884, nelle *Applicazioni* (1887) e nelle *Lezioni di Analisi* (1893): pur tenendo presente il diverso pubblico di lettori cui questi testi sono rivolti, si rileva infatti uno spostamento dell'asse concettuale nella scelta dei temi e soprattutto nella metodologia didattica. Entrambe questi aspetti possono essere giustificati tenendo conto del fatto che, nel periodo immediatamente successivo all'edizione del *Genocchi-Peano*, Peano si era accostato ai metodi e alle notazioni del calcolo geometrico, e, parallelamente, aveva iniziato ad interrogarsi sull'opportunità di elaborare un'ideografia logico-matematica, funzionale sia all'attività di ricerca, sia alla didattica. Proprio in conseguenza di ciò, le *Lezioni di Analisi* possono segnare, come asserisce B. Levi, un regresso rispetto al trattato del 1884 a livello di rigore espositivo,<sup>3</sup> ma nel contempo ne rap-

<sup>1</sup> Cfr. GIUSEPPE PEANO, *Lezioni di Calcolo*, ms. litografato, cc. 1r-178v, nn., Archivio Privato del Prof. E. Casari.

<sup>2</sup> G. Peano a E. Cesàro, Torino 20.1.1891, in PALLADINO 2000, p. 20.

<sup>3</sup> LEVI 1932 p. 262, 1955, p. 21: «[...] e qui voglio ancora ricordare una caratteristica per così dire pratica del pensiero e dell'insegnamento del Peano, che potrebbe parere in opposizione colle astrattezze dell'assoluto rigore: chi esamini le *Lezioni di Analisi infinitesimale* che riproducono il Corso quale egli impartì fra il 1890 e il 1900 nella R. Accademia Militare e nella R. Università di Torino a scolaresche miste di aspiranti alla scienza pura e alla pratica applicazione, non trova né ricerca di generalità, né minuzia di condizioni per la validità delle proposizioni; nonostante qualche divagazione attraverso gli argomenti prediletti, notazioni logiche e calcolo geometrico, l'Autore procede rapido ammettendo tutte le condizioni di continuità che nella pratica si verificano e che consentono agli enunciati e alle dimostrazioni la massima semplicità.»

presentano il completamento, essendo arricchite di nuovi paragrafi, dedicati alla logica e alla teoria dei complessi ad  $n$ -unità.<sup>1</sup> Non stupisce allora che, all'atto di curare l'edizione tedesca del *Genocchi-Peano*, si sia scelto di integrare la versione italiana proprio con la traduzione di quei paragrafi delle *Lezioni di Analisi*,<sup>2</sup> né stupisce che, citando nei lavori successivi il suo trattato, Peano ricorra sovente all'edizione tedesca.<sup>3</sup>

Il maggior peso della logica e dei temi dell'analisi algebrica, e la progressiva acquisizione di una mentalità operatoriale e funzionale, che emergono nelle ricerche di analisi di questi anni, riflettono le nuove esigenze dei progressi compiuti dalla ricerca analitica, e sono presenti anche nelle lezioni litografate dei corsi tenuti da Peano nel 1891 e nel 1904.<sup>4</sup> Essi costituiscono uno dei *trait d'union* fra il *Genocchi-Peano* e il *Formulaire di Matematica*, definito non a caso dallo stesso Peano:

un trattato, più completo dei miei precedenti, di Calcolo Infinitesimale incluse le parti introduttorie, Aritmetica, Algebra e Geometria.<sup>5</sup>

Fra il 1884 e il 1899 Peano conduce un attento esame delle ambiguità linguistiche ancora presenti nel *Genocchi-Peano*. Alcune tracce di quest'analisi affiorano nelle sue corrispondenze. Ad esempio egli scrive a E. Cesàro nel gennaio del 1891:

Riesaminai la dimostrazione del teorema di Cantor, a pag. 13 e 14 del *Calcolo differenziale ecc. di A. Genocchi*, da me pubblicato, e la trovo del tutto rigorosa. Salvo che la dicitura non è la migliore [...]. Ritornando a questa dimostrazione, essa mi pare rigorosa. Forse c'è pericolo di ambiguità nella 3<sup>a</sup> ultima riga di pag. 13, ove dico che le quantità della serie *possono crescere* in modo da raggiungere  $b$ . Con queste parole non intendo di affermare che esse *crescano* in modo da raggiungere  $b$ , cosa che non sarebbe vera; ma semplicemente che si può scegliere la serie in modo tale che esse crescano in modo da raggiungere  $b$ . Quindi Ella mi farà assai piacere a segnalarmi le difficoltà che vi ha trovato. [...] E io spero che Ella vorrà anche parlarci di altre questioni di Matematica; e poiché noi dobbiamo fare lo stesso insegnamento, e quindi incontrare sulla nostra via le stesse difficoltà, io mi permetterò di sottoporre anche qualcuna al suo giudizio.<sup>6</sup>

<sup>1</sup> GIUSEPPE PEANO, *Lezioni di analisi infinitesimale*, 1893h, vol. I, pp. 9-10, 132-136, 259-266, vol. II, pp. 1-140.

<sup>2</sup> Il capitolo di PEANO 1899t sulla teoria dei complessi è parzialmente tradotto dalle *Lezioni di Analisi*, 1893h, vol. II, pp. 1-140.

<sup>3</sup> GIUSEPPE PEANO, *Formulaire de Mathématiques*, 1899b, pp. 133, 171, 174; *Formulaire de Mathématiques*, 1901b, p. 148; *Formulaire mathématique*, 1903f, p. 179.

<sup>4</sup> *Lezioni di calcolo infinitesimale del prof. G. Peano per cura di C. S. Meriano*, 1891n; *Lezioni di Calcolo infinitesimale tenute dal prof. G. Peano nella R. Università di Torino*, 1904, *Stenografate da Igino De Finis*, 1904d.

<sup>5</sup> GIUSEPPE PEANO, *Pubblicazioni di G. Peano*, cit., 1916c, p. 8.

<sup>6</sup> G. Peano a E. Cesàro, Torino 14.1.1891, in PALLADINO 2000, pp. 17-18.

A distanza di appena pochi giorni Peano torna sull'argomento proponendo di emendare così il testo del trattato del 1884:

Le espressioni di cui mi servii a pag. 13 lasciano molto a desiderare. Invece delle parole (linea ultima) *le quantità  $a, a_1, a_2, \dots$  tenderanno verso un limite, e sia  $c$  si legga: Sia  $c$  il limite superiore di tutte le possibili quantità  $a, a_1, \dots$* <sup>1</sup>

Una fonte preziosa per documentare le ricerche di Peano in campo analitico in questi anni è inoltre fornita dai *marginalia* da lui apposti sulla sua copia del *Genocchi-Peano*, conservata a Parma. Essi costituiscono una sorta di *memorandum* in cui sono registrati, con accuratezza, le fasi, i tentativi e i risultati dell'analisi logico-linguistica condotta sul trattato di *Calcolo*.<sup>2</sup> Si tratta di oltre seicento note autografe, la cui datazione risale agli anni 1884-1899. Il termine *post quem* è giustificato dal fatto che le annotazioni comprendono le correzioni dei refusi tipografici, apportate in fase di revisione di bozze per stilare l'*Errata Corrige* apposto al termine del volume.<sup>3</sup> Il limite *ante quem* è invece dovuto ai riferimenti e confronti fra l'edizione italiana e quella tedesca, risalente appunto al 1899.<sup>4</sup>

A ridosso dell'uscita del trattato Peano registra, sul risvolto di copertina e sulle pagine bianche del volume, la dichiarazione di Genocchi di estraneità pubblicata sugli «Annali di Matematica» e l'intervento da lui inviato in risposta alla dichiarazione apparsa invece sulla rivista belga «Mathesis». Trascrive poi i commenti lusinghieri che avevano accolto il trattato: la recensione di A. Paraf, la relazione di A. Capelli, il giudizio eccellente di P. Mansion, la prefazione alla terza edizione del *Cours d'Analyse* di P. Gilbert, in cui quest'ultimo dichiarava di essersi «particolarmente ispirato» al *Genocchi-Peano* e, infine, la recensione a questo testo curata da P. Fambri e P. Cassani, in cui gli autori ne ribadivano il rigore:

In questi ultimi tempi apparvero tre opere magistrali di calcolo differenziale ed integrale. Essi dal lato del rigore dimostrativo soddisfano pienamente alle esigenze dei tempi: d'una è autore il Ch.<sup>mo</sup> sig. Jordan, d'un'altra i nostri lodatissimi Genocchi e Peano, della terza l'illustre sig. Gilbert.<sup>5</sup>

<sup>1</sup> G. Peano a E. Cesàro, Torino 20.1.1891, in PALLADINO 2000, pp. 19-20.

<sup>2</sup> La correzione elaborata da Peano, a seguito delle obiezioni sollevate da Cesàro, è ad esempio registrata in FCP, *marginalia* PEANO 1884c, p. 13.

<sup>3</sup> FCP, *marginalia* PEANO 1884c, pp. 4, 7, 13, 16, 18, 19, 25, 28, 32, 43, 44, 45, 48, 50, 61, 71, 73, 77, 97, 110, 117, 124, 148, 150, 153, 172, 173, 178, 188, 190, 207, 224, 245, 275, 277 e 282.

<sup>4</sup> FCP, *marginalia* PEANO 1884c, p. XIII.

<sup>5</sup> FCP, *marginalia* PEANO 1884c, apposto sulla pagina non numerata della *Prefazione*; PAULO FAMBRI, PIETRO CASSANI, *Relazione intorno al nuovo corso d'analisi infinitesimale del prof. Filippo Gilbert dell'Università di Lovanio*, «Atti del Reale Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti», VII, 1888-1889, pp. 589-601, la citazione qui riportata si trova a p. 590.

Accanto ai *marginalia* di Peano si trovano poi alcune note, talora scritte su foglietti bianchi inseriti nel *Genocchi-Peano*, ma autografe di U. Cassina: ad esempio, nella pagina della Prefazione, a fianco della frase «mi obbligò a importanti aggiunte e a qualche modificazione» Cassina scrive: «Ecco la frase che deve aver offeso Genocchi!». <sup>1</sup>

Frutto di un accurato e continuo lavoro di revisione e di integrazione, i *marginalia* di Peano comprendono complementi e appunti per dimostrazioni alternative, <sup>2</sup> correzioni, <sup>3</sup> e integrazioni bibliografiche. <sup>4</sup> Queste ultime testimoniano, fra l'altro, le ricerche svolte da Peano, in corso di edizione, per redigere le sue *Annotazioni* iniziali. Esse sono state redatte dopo l'uscita dei primi ventidue fascicoli e sono infine confluite nei due fascicoli di «aggiunte», in apertura al volume. <sup>5</sup>

Altre note, risalenti agli anni successivi alla stampa del volume, comprendono citazioni e appunti su quei matematici che, alla luce della pubblicazione del *Genocchi-Peano*, hanno corretto le inesattezze e gli errori segnalati nei loro trattati o ne hanno tratto spunti per modificare le loro esposizioni. Ad esempio Peano commenta a pagina XI:

Il Gilbert, nella 3<sup>a</sup> edizione (1887) pag. 61 si corregge e fa rilevare l'errore in cui era caduto. <sup>6</sup>

A piè di pagina, dopo l'annotazione contenente il celebre controesempio sulla teoria dei minimi e massimi per funzioni di due variabili, Peano segna invece i nomi di F. Richelot, P. Schiermacher, K.A. Posse e B. Bukreiev che, fra il 1884 e il 1893, hanno ripreso e ampliato tale risultato. <sup>7</sup> A fianco del teorema sui determinanti Jacobiani, erroneamente enunciato da J. Bertrand, Peano osserva invece che «il Laurent, pag. 164 riporta questo teorema»: <sup>8</sup> un cenno, questo, che utilizzerà nella sua recensione al *Traité d'Analyse* (1892).

<sup>1</sup> FCP, *marginalia* PEANO 1884c, autografo di U. Cassina, apposto sulla pagina non numerata della Prefazione.

<sup>2</sup> FCP, *marginalia* PEANO 1884c, pp. xv, 1, 3, 4, 6, 7, 8, 11, 12, 22, 23, 25, 26, 28, 29, 30, 35, 38-39, 42, 43, 44-45, 46, 49, 50-51, 53, 61, 62, 63, 64, 65, 68, 70, 71, 72, 78, 79, 80, 82, 84, 85, 87, 89, 90, 91, 93, 94, 95, 96, 99, 106, 107, 108-109, 110, 111, 114, 116, 117, 118, 119, 148, 176, 177, 182, 183, 191, 192, 194, 195, 200, 203, 214, 219, 220, 222, 223, 228, 242, 251, 269, 274, 275, 276, 277, 282, 283, 284, 309, 316, 317, 327, 331, 332, 333.

<sup>3</sup> FCP, *marginalia* PEANO 1884c, pp. 13, 76, 97, 112, 120, 139, 253, 255, 259.

<sup>4</sup> FCP, *marginalia* PEANO 1884c, pp. vii, ix, xvi, xxvii, 5, 13, 27, 29, 30, 31, 36, 43, 44, 53, 57, 65, 68, 69, 78, 85, 89, 90, 91, 92, 93, 99, 103, 115, 116, 117, 118, 120, 122, 124, 129, 131, 144, 149, 172, 191, 195, 208, 218, 220, 252, 264, 266, 267, 269, 274, 275, 276, 277, 282, 299, 313, 318, 328, 330.

<sup>5</sup> FCP, *marginalia* PEANO 1884c, pp. 3, 10, 20, 29, 50, 52, 54, 58, 64, 65, 69, 70, 71, 90, 107, 108, 123, 124, 125, 128, 178, 215, 224, 262.

<sup>6</sup> FCP, *marginalia* PEANO 1884c, p. xi.

<sup>7</sup> FCP, *marginalia* PEANO 1884c, p. xxix.

<sup>8</sup> FCP, *marginalia* PEANO 1884c, p. xxvii.

Numerosi *marginalia*, inoltre, comprendono la traduzione in linguaggio logico-matematico delle proposizioni del trattato del 1884.<sup>1</sup> Essa è stata condotta ricorrendo a differenti sistemi simbolici e i *marginalia* registrano il processo per prove ed errori con cui Peano ha elaborato il suo linguaggio ideografico e lo ha applicato nell'ambito analitico. L'interesse per le notazioni in uso nei differenti trattati emerge a partire dal 1887 ed è confermato dal commento sui segni impiegati da Gilbert nella terza edizione del suo *Calcolo*:

Propone il segno  $\succ$  per  $\geq$  e  $\leq$  per  $\leq$ ; VA per *valore assoluto di*; M per *medio*.<sup>2</sup>

Nel paragrafo sul concetto di limite, su cui Peano si sofferma fra il 1892 e il 1895, molte proposizioni sono accostate alla loro traduzione in linguaggio ideografico, con il ricorso a simboli poi abbandonati da Peano. Nella relazione

$$(A \triangleleft \lim E) \cap (B \triangleleft \lim E) < (A = B)^3$$

che esprime il teorema secondo cui «una quantità non può tendere contemporaneamente verso due limiti diversi» compare infatti il segno  $<$  per denotare l'implicazione fra classi, poi sostituito con il simbolo  $\supset$ , mentre il segno  $\triangleleft$  cadrà successivamente in disuso. A pagina 8 si trova invece l'espressione in linguaggio ideografico del concetto di limite superiore:

A sia una classe di N.[umeri]

Def.  $\lim \sup A = x: \{[A(>x)=0] \cap [y: \{(y < x) \cap [A(>y)=0]\} = 0]\}^4$

Proprio l'esame di questi *marginalia*, unitamente a quello delle note autografe alle *Lezioni di analisi infinitesimale* del 1893, apposte sulla copia in possesso di Peano, oggi conservata nella Biblioteca Civica di Cuneo,<sup>5</sup> ha consentito di evidenziare un legame fra questi trattati e di mostrare come essi abbiano costituito una delle basi contenutistiche per la redazione dei capitoli di calcolo differenziale ed integrale del *Formulario di Matematica*.

<sup>1</sup> FCP, *marginalia* PEANO 1884c, pp. 1, 4-5, 6, 7, 8, 10, 11, 28, 36, 42, 49, 55, 59, 61, 62, 106, 127, 149, 152, 170, 218, 229, 230, 231, 235, 237.

<sup>2</sup> FCP, *marginalia* PEANO 1884c, apposto sul risvolto di copertina.

<sup>3</sup> FCP, *marginalia* PEANO 1884c, p. 5.

<sup>4</sup> FCP, *marginalia* PEANO 1884c, p. 8.

<sup>5</sup> GIUSEPPE PEANO, *Lezioni di analisi infinitesimale*, 1893h, BCC, vol. I, *marginalia* pp. 1, 3, 4-5, 6, 7, 8, 12, 13, 14, 15, 16, 21, 33, 54, 58, 61, 64, 85, 105, 123, 124, 127, 130, 137, 138, 154, 155, 163, 165, 191, 211, 216, 217, 218, 219, 221, 223, 224, 226, 227, 228, 229, 230, 231, 236, 243, 245, 247, 259, 262, 264, 265, 271, 278, 283, 288, 290, 298-299, 305, 306, 309, 312, 313; vol. II, *marginalia* pp. 2, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 15, 19, 28, 33, 34, 39, 42, 43, 44, 48, 54, 55, 59, 60, 62, 63, 66, 73, 74, 78, 84, 96, 108, 115, 121, 130, 135, 136, 141, 149, 150, 193, 195, 210, 211, 212, 213, 214, 220, 221, 230, 231, 232, 233, 235, 236, 237, 240, 242, 244, 245, 248, 255, 259, 261, 262, 263, 264, 267, 268, 269, 270, 274, 275, 276, 277, 279, 280, 282, 283, 285, 286, 287, 288, 290, 291, 294, 295, 296, 300, 302, 303, 304, 305, 307, 308, 309, 316, 317, 318, 321, 323.

In conclusione, nel volgere di una decina di anni, l'interesse di Peano per gli aspetti formali si traduce in attenzione per il simbolismo matematico. I *marginalia* al trattato del 1884 riflettono apertamente il duplice spirito che anima l'elaborazione da parte di Peano del suo linguaggio logico-simbolico: essa da un lato risulta motivata dalla volontà di fornire uno strumento utile per la ricerca, dall'altro è dovuta all'intenzione di implementare la precisione e il rigore nell'insegnamento dell'analisi. Peano stesso mostra del resto piena consapevolezza del fatto che l'introduzione del linguaggio e degli strumenti logici nelle scuole deve essere graduale e mediata, come si evince dalla lettera che scrive a E. Catalan nel 1892:

Or, dans notre cas, je suppose données les idées générales de logique [...]. L'homme acquiert ses cognitions non seulement au moyen de la déduction (définitions, syllogismes, etc.), mais aussi, et spécialement dans sa jeunesse, par l'induction, la généralisation, l'abstraction, etc. Et il convient dans l'enseignement tirer parti de toutes les cognitions précédentes, et de toutes les qualités de l'âme, au lieu de se servir seulement de quelques-unes. Cela n'empêche pas qu'on puisse ensuite étudier ce qu'on peut déduire, en supposant seulement certaines idées, et sans se servir des autres. [...] Les études de cette nature ne sont pas, je crois, stériles. On voit sous des points différents les éléments de la mathématique; et lorsque ces théories sont suffisamment élaborées, on les peut substituer ou partiellement ou en totalité dans l'enseignement à d'autres théories. Mais il ne faut pas, de l'autre côté, exagérer, et croire qu'on puisse tout-de-suite expliquer dans les écoles, les définitions et les théorèmes, p. ex., sous la forme que j'ai publié. Ils seront simplement *incompréhensibles*.<sup>1</sup>

I *marginalia* offrono allora un bell'esempio della feconda interazione fra l'attività di ricerca e la docenza che costituisce una delle più efficaci chiavi di interpretazione dell'intera opera di Giuseppe Peano.

#### APPENDICE

##### LA POLEMICA GILBERT-PEANO

1. A. Genocchi a P. Tardy, Torino 11.3.1884, BUG, busta 12/86, cc. 1r-2r.

Carissimo Tardy,

Domenica scorsa (9 Marzo) la nostra Accademia tenne adunanza a classi unite per festeggiare il centenario della sua fondazione. Lesse il Presidente Fabretti<sup>2</sup>

<sup>1</sup> G. Peano a E. Catalan, Torino 25.1.1892, in FRANÇOIS JONGMANS, *Quelques pièces choisies dans la correspondance d'Eugène Catalan*, «Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège», 50, 9-10, 1981, pp. 307-308.

<sup>2</sup> Ariodante Fabretti è presidente dell'Accademia delle Scienze di Torino dal 1883 al 1885.



un bel discorso sulle vicende del nostro sodalizio, e il Tesoriere Barone Manno<sup>1</sup> un ragguaglio di documenti manoscritti che si trovavano nei vecchi scaffali dell'Accademia. Poi fu distribuito agli Accademici un grosso volume che già vi annunziai e che contiene le mie Note biografiche intorno a Luigi Lagrange.<sup>2</sup> Credo che questo volume si mandi a tutti i Corrispondenti dell'Accademia e quindi lo avrete ricevuto o lo riceverete anche voi; ma ignoro che si siano destinati esemplari a parte del mio articolo, e non ho osato di chiedere se si diano o non si diano, ma il mio articolo era già stampato da più d'un anno, cosicché a quest'ora non devo più aspettarne esemplari a parte. In pochi giorni sarà pure pubblicato il primo fascicolo degli Atti della stessa Accademia pel nuovo anno 1883-84.

Il Peano ha pubblicata la seconda dispensa delle lezioni // di calcolo che va incirca fino alla pag. 150.<sup>3</sup>

Egli ha scritto al Jordan<sup>4</sup> comunicandogli una dimostrazione che non abbisogna della continuità della derivata e che è la stessa data da me nel mio Corso orale,<sup>5</sup> ovvero con poche modificazioni quella che è riferita dal Serret nel suo Trattato e da lui attribuita ad Ossian Bonnet.<sup>6</sup>

Nei *Comptes rendus* ho stampato un sunto d'alcune mie vecchie ricerche intorno all'esistenza di certi numeri primi.<sup>7</sup> Me ne diede occasione l'annuncio di ricerche analoghe d'un M. Lefébure che prima aveva preteso di poter dimostrare il teorema del Fermat ( $x^n + y^n = z^n$  impossibile per  $n > 2$ ) e anzi (se non erro) è uno dei due concorrenti pel premio stabilito sopra tale questione dall'Accademia di Brusselle, premio che non fu assegnato ad alcuno.<sup>8</sup>

La questione della tautocrona fu trattata di nuovo dal prof. Formenti nei Rendiconti dell'Istituto Lombardo ove chiamò l'attenzione a studi del Lagrange<sup>9</sup>

<sup>1</sup> Antonio Manno è vice tesoriere dell'Accademia delle Scienze di Torino dal 1879 al 1883 e tesoriere dal 1883 al 1889.

<sup>2</sup> A. GENOCCHI, *Note Biografiche intorno ai tre fondatori della R. Accademia delle Scienze, I Luigi Lagrange*, in A. MANNO, *Il primo secolo della Reale Accademia delle Scienze di Torino. Notizie Storiche e Bibliografiche, 1783-1883*, Torino, Paravia, 1883, pp. 86-95.

<sup>3</sup> PEANO 1884c. Le prime due dispense comprendevano il Capitolo I, *Delle funzioni* (pp. 1-30), il Capitolo II, *Delle derivate* (pp. 31-53), il Capitolo III, *Delle Serie* (pp. 54-125) e il Capitolo IV, *Delle funzioni di più variabili. Funzioni implicite* (pp. 126-148).

<sup>4</sup> La lettera di G. Peano a C. Jordan, Torino 16.2.1884, è edita in BORGATO 1991, pp. 93-95. Tardy cita le osservazioni di Peano a Jordan nella lettera ad A. Genocchi, Genova 1.3.1884, FGP, ms. EE, c. 2v: «Il Peano ha cominciato a stampare le lezioni di Calcolo? Vidi di lui una rettificazione al Jordan che fu trovata giusta dall'autore. In quanto alla formola  $f(x+h) - f(x) = hf'(x + \theta h)$  anch'io sono poco persuaso che non sia necessaria la continuità delle derivate.»

<sup>5</sup> Cfr. A. GENOCCHI, [*Calcolo differenziale 1865-66*], FGP, ms. S1, f. 6, cc. 1r-2v; [*Calcolo differenziale*], ADT, cc. 91-96; *Calcolo Differenziale*, BCT, cc. 48-52.

<sup>6</sup> Cfr. J. A. SERRET, *Cours de calcul différentiel et intégral*, Paris, Gauthier-Villars, 1868, vol. I, pp. 17-19 (edizione da me consultata, 3<sup>a</sup>, 1886, vol. I, pp. 17-19).

<sup>7</sup> A. GENOCCHI, *Sur le diviseurs de certains polynômes et l'existence de certains nombres premiers*, «Comptes Rendus de l'Académie des Sciences», XCVIII, 1884, pp. 411-413.

<sup>8</sup> A. LEFÉBURE, *Sur la composition de polynômes algébriques qui n'admettent que des diviseurs premiers d'une forme déterminée*, «Comptes Rendus de l'Académie des Sciences», XCVIII, 1884, pp. 293-295, 413-416.

<sup>9</sup> C. FORMENTI, *Espressione generale di Lagrange della forza atta a produrre un movimento tautocrono*, «Rendiconti dell'Istituto Lombardo», 2, XVI, 1883, pp. 927-936.

di cui non avevano fatto cenno né il Bertrand né il Brioschi<sup>1</sup> ma ch'io aveva notati da molti anni proponendomi di parlarne, e che ho menzionati nelle suddette mie Note biografiche.<sup>2</sup> //

Leggerò appena potrò la Memoria che m'indicate del Thomé.<sup>3</sup>

Il Darboux fu eletto dall'Accademia di Parigi a successore del Puiseux.<sup>4</sup>

Ho salutati per voi gli amici D'Ovidio<sup>5</sup> e Siacci<sup>6</sup> che vi ringraziano e vi rendono il saluto. Scrivetemi subito se non volete dimenticarvene di nuovo, state sano e credetemi

Torino (14 via Rossini), 11 marzo 84

V<sup>ro</sup> Aff<sup>mo</sup> Amico

A. Genocchi

2. P. Tardy a A. Genocchi, Genova 13.3.1884, FGP, ms. EE, cc. 1r-2v.

Carissimo Genocchi,

vi scrivo subito due righe, perché domani l'altro parto per Roma. Vado a passare là alcuni giorni con mio nipote, e più tardi andrò in Toscana da una delle nipoti. Probabilmente farò la Pasqua fuori di Genova, ma non sono ancora del tutto deciso. Una volta, quando non ero solo, faceva dei progetti ben definiti; ora mi lascio guidare un po' dalle circostanze, inoltre più che spesso mi prende // la smania di mutare, come se il cangiamento dovesse farmi del bene, o recarmi un conforto.

Vi ringrazio della vostra lettera, e del piccolo lunario, e delle notizie che mi date.<sup>7</sup>

Conosceva la dimostrazione di quella formola data dal Bonnet, e riferita dal Serret. Ora non ho il tempo di riguardarla, ma l'impressione che mi è rimasta si è che le condizioni imposte alla derivata ne implicassero la continuità.<sup>8</sup>

Aveva pure veduto l'articolo del Formenti, il quale mentre ha delle // osservazioni giuste, in qualche punto non mi soddisfa.<sup>9</sup>

Ora faccio i preparativi per la partenza, e non ho la quiete per occuparmi d'altro.

Ho sviluppato un altro calcolo non fatto dal Thomé, e mi pare di avere anche semplificata la deduzione di una sua formola.<sup>10</sup>

<sup>1</sup> F. BRIOSCHI, *Intorno al problema delle tautochrone*, «Buletino di Bibliografia e Storia delle Scienze Matematiche e Fisiche (Boncompagni)», 9, 1876, pp. 241-246.

<sup>2</sup> Cfr. nota 2, p. 256.

<sup>3</sup> Genocchi allude qui ai due saggi di L.W. THOMÉ, *Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen*, «Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelle)», 74, 1872, pp. 193-217 e L.W. THOMÉ, *Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen (Fortsetzung)*; siehe Bd. 74 und 75 dieses Journals), «Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelle)», 76, 1873, pp. 273-302.

<sup>4</sup> Gaston Darboux (1842-1917) fu eletto nel 1884 socio dell'Accademia delle Scienze di Parigi, sul posto lasciato vacante da Victor Alexandre Puisieux (1820-1883) e nel 1900 divenne segretario dell'Accademia.

<sup>5</sup> Enrico D'Ovidio (1843-1933).

<sup>6</sup> Francesco Siacci (1839-1907).

<sup>7</sup> A. Genocchi a P. Tardy, Torino 11.3.1884, BUG, busta 12/86, cc. 1r-2r.

<sup>8</sup> Cfr. note 5 e 6, p. 256.

<sup>9</sup> Cfr. nota 9, p. 256.

<sup>10</sup> Cfr. nota 3, p. 257.

Cremona<sup>1</sup> mi ha scritto una riga per dirmi che Hirst<sup>2</sup> è a S. Remo e che forse tra qualche giorno passerà per Genova. Mi rincresce moltissimo di non trovarmi, e perdere così l'occasione di rivedere quell'uomo tanto simpatico. //

Penso con piacere che più tardi (forse nel Giugno) potrò trovarmi con voi in Torino, se non sorgeranno ostacoli. Addio, carissimo Genocchi, vogliatemi sempre bene, e credetemi

V<sup>o</sup> Aff. P. Tardy

È forse il Bona l'editore del trattato di Calcolo del Peano?<sup>3</sup>

Vi do il mio indirizzo di Roma, se mai voleste scrivermi: 133. Via Principe Umberto. Del resto le lettere mandate a Genova mi saranno sempre recapitate.

3. A. Genocchi a P. Tardy, Torino 10.4.1884, BUG, busta 12/87, cc. 1r-2r.

Carissimo Tardy,

Ricevetti a suo tempo la grata vostra del 13 marzo che mi annunciava la vostra partenza per Roma e la probabile vostra dimora fuori di Genova fin dopo Pasqua.<sup>4</sup> Scrivo nondimeno a Genova come mi suggerite poiché non avete potuto assegnar preciso il tempo né il luogo della vostra assenza. Intanto sin dal giorno 11 marzo ho ripreso le mie lezioni all'Università<sup>5</sup> senza troppo incomodo anzi con qualche vantaggio per le distrazioni che mi procurano togliendomi alla noia del vivere solitario. Ne ho fatte undici e spero di continuarle dopo le vacanze pasquali.<sup>6</sup> Sono solito anche di assistere alle adunanze della nostra Accademia delle Scienze. Seppi che il libro del Centenario non si mandava ai Corrispondenti, e a me non furono dati esemplari a parte delle mie Note biografiche intorno al Lagrange;<sup>7</sup> ma il prof. Giuseppe Molinari, Assistente alla Segreteria dell'Accademia, al quale io manifestai il desiderio che uno di quei volumi potesse venirvi mandato, lo comunicò al Presidente prof. Ariod. Fa-

<sup>1</sup> Luigi Cremona (1830-1903), professore ordinario di Geometria superiore all'Università di Bologna e di Statica grafica al Politecnico di Milano, nel 1873 si trasferì a Roma come direttore della Scuola d'Ingegneria. I suoi contributi più importanti riguardano lo studio delle corrispondenze algebriche birazionali, poi dette cremoniane, e la geometria algebrica, di cui pose le basi. Cfr. *Luigi Cremona (1830-1903), Convegno di Studi matematici, Milano 16-17 ottobre 2003*, Milano, Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, 2005.

<sup>2</sup> Thomas Archer Hirst (1830-1892), docente di fisica all'University College di Londra, lasciò importanti contributi sulle trasformazioni cremoniane e il suo lavoro su questo tema fu insignito della medaglia della Royal Society nel 1883.

<sup>3</sup> Il trattato del 1884 fu pubblicato dalla casa editrice Fratelli Bocca e fu stampato a Torino per i tipi di Vincenzo Bona, come si legge sul retro del frontespizio.

<sup>4</sup> P. Tardy a A. Genocchi, Genova 13.3.1884, FGP, ms. EE, cc. 1r-2v.

<sup>5</sup> Genocchi tenne le sue lezioni dall'11.3.1884 fino al termine dell'anno scolastico; l'ultima lezione è datata 24.5.1884. Cfr. *Registro delle Lezioni di Calcolo infinitesimale dettate dal Sig. Prof. Genocchi (assistente D' Peano) nell'anno scolastico 1883-84*, FGP, ms. SS, cc. 4v-6v.

<sup>6</sup> Si tratta delle lezioni tenute nei giorni 11, 13, 18, 20, 22, 25, 27 e 29 del mese di marzo, 1, 3 e 5 aprile. Il corso di Genocchi riprese regolarmente, dopo la pausa delle vacanze pasquali, il 17 aprile 1884. Cfr. *Registro delle Lezioni di Calcolo infinitesimale dettate dal Sig. Prof. Genocchi (assistente D' Peano) nell'anno scolastico 1883-84*, FGP, ms. SS, cc. 4v-5v.

<sup>7</sup> Cfr. nota 2, p. 256.

bretti e questi avendone più d'uno ebbe la gentilezza di darne uno al Molinari che s'incaricò di trasmetterlo per la posta sinchè già da qualche tempo sarà giunto al vostro domicilio in Genova.

Mi avete fatto cenno dei vostri studi per spiegare e semplificare la deduzione d'alcuna formola del Thomé. Non sarebbe utile che li pubblicaste?<sup>1</sup>

Il Serret, dopo aver riportata la dimostrazione di Ossian Bonnet per la formola  $f(x_0 + h) - f(x_0) = hf'(x_0 + \theta h)$  dice espressamente ch'essa non suppone la continuità della derivata; la sola condizione espressa è che la derivata abbia un valore *determinato* per ogni valore di  $x$  nell'intervallo da  $x_0$  ad  $x_0 + h$ .<sup>2</sup> Ora una funzione può avere un valor determinato in un intervallo anche lungo senza esser continua e si può immaginare che l'intervallo sia diviso in molte parti, che in ciascuna parte la funzione sia continua e si riduca a qualche funzione nota, e che nel passaggio dall'una all'altra parte prenda per esempio il valore zero. Trovo nel Serret una funzione che rappresento con

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin at \cos xt}{t} dt$$

e che per  $x < a$  ha il valore 1, per  $x = a$  il valore  $\frac{1}{2}$  e per  $x > a$  il valore zero: ecco dunque una funzione discontinua che ha sempre un valor determinato.<sup>3</sup>

La dimostrazione di Ossian Bonnet a me quando la lessi parve esatta o facilmente riducibile all'esattezza, ed era solito darla in iscuola. Credo anche l'abbia data il Peano nell'anno scorso e in questo.<sup>4</sup>

Nelle *Nouvelles Annales*, marzo 1884, pag. 153, la quistione tra Jordan e Peano è stata ripresa dal prof. Ph. Gilbert di Lovanio<sup>5</sup> che sostiene aver ragione il Jordan anche nella parte principale in cui egli aveva confessato d'aver avuto torto, cosa che mi pare alquanto strana.<sup>6</sup> Il Gilbert suppone che Jordan abbia veduto dietro l'obbiezione del Peano qualche difficoltà più sottile; ma una delle due: o questa difficoltà infirmava la dimostrazione del Jordan, e allora questi avrebbe errato nel suo libro, o non la infirmava e Jordan non doveva ritirarsi innanzi ad

<sup>1</sup> Il suggerimento di Genocchi fu accolto da Tardy che pubblicò le sue ricerche nella nota *Relazioni tra le radici di alcune equazioni fondamentali determinanti*, «Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino», XIX, 1884, pp. 835-848.

<sup>2</sup> J. A. SERRET, *Cours de calcul différentiel et intégral*, Paris, Gauthier-Villars, 1868, vol. I, p. 19 (edizione da me consultata, 3<sup>a</sup>, 1886, vol. I, p. 19).

<sup>3</sup> J. A. SERRET, *Cours de calcul différentiel et intégral*, Paris, Gauthier-Villars, 1868, vol. II (3<sup>a</sup> edizione da me consultata, 1886, vol. II, pp. 130-131).

<sup>4</sup> Tale dimostrazione è esposta da Peano nella nona lezione del corso, tenuta il 27.11.1883 (cfr. *Registro delle Lezioni di Calcolo infinitesimale dettate dal Sig. Prof. Genocchi (assistente d' Peano) nell'anno scolastico 1883-84*, FGP, ms. SS, cc. 1v), mentre non è possibile datare quella dell'anno precedente, mancando il relativo Registro.

<sup>5</sup> Louis-Philippe Gilbert (1832-1892), professore di analisi all'Università cattolica di Lovanio dal 1855, si occupò di calcolo infinitesimale, di ottica teorica e di fisica sperimentale. Cattolico militante, partecipò alla creazione della Société Scientifique de Bruxelles e, in alcuni lavori di storia della scienza, cercò di difendere la condotta tenuta dalla Chiesa nel processo di Galileo. Cfr. J. MAWHIN, *Une brève histoire des mathématiques à l'Université Catholique de Louvain*, «Revue des Questions Scientifiques», 163, 1992, pp. 372-375.

<sup>6</sup> P. GILBERT, *Correspondance*, «Nouvelles Annales de Mathématiques», 3, III, 1884, pp. 153-155.

essa e ammettere d'aver errato.<sup>1</sup> Poi viene la quistione della continuità della derivata, e il Gilbert crede che Jordan l'abbia sollevata *non sans malice* perchè *le théorème est inexact*, ma porta un esempio che non prova nulla.

La funzione che dal valore  $\sqrt{2px}$  passa al valore  $\sqrt{2p(2a-x)}$  ha una derivata che dal valore  $\sqrt{\frac{p}{2x}}$  passa al valore  $-\sqrt{\frac{p}{2(2a-x)}}$  quindi al valore  $x = a$  della variabile corrispondono due valori  $\sqrt{\frac{p}{2a}}$  e  $-\sqrt{\frac{p}{2a}}$  di questa derivata, e non si sa a quale dei due valori si debba dare la preferenza. Non si tratta dunque soltanto d'una derivata discontinua ma di una derivata che non ha un valor determinato per un valor determinato della variabile. Ma come si vede il gesuita che mancando di franchezza non può ammettere che gli altri siano franchi e sinceri! Jordan non sarebbe schietto quando riconosce d'aver errato e nasconderebbe una malizia quando chiede una dimostrazione. Il Peano ha mandata al Jordan la dimostrazione chiestagli, e quegli non ha più replicato onde è probabile che l'abbia trovata esatta.<sup>2</sup> Ma Gilbert pare che voglia per forza farci ricordare d'esser sempre quel clericale che diede le sue dimissioni dall'Accademia di Brusselle perchè un // Accademico si era burlato della *Balena di Giona*.

Avete indovinato. È proprio il Bona l'editore del *Calcolo* di Peano.

Una disgrazia che non mi aspettava è accaduta in questo tempo. Il Sella che aveva dieci anni meno di me ci è stato rapito!<sup>3</sup> Ciò mi ha recato molto dolore anche pei servizi e gli atti di benevolenza ch'io ho avuti da lui in ogni tempo. Nella presidenza de' Lincei gli è succeduto il Brioschi.<sup>4</sup> Molti portavano il Cremona e senza dubbio sono scienziati eminenti l'uno e l'altro.

Datemi vostre notizie al più presto, gradite i miei cordiali augurii per le prossime feste, e credetemi sempre

V<sup>ro</sup> Aff<sup>mo</sup>

A. Genocchi

Torino (via Rossini N° 14) 10 aprile 1884

PS. Se non fosse giunto alla sua destinazione in Genova il volume Accademico del centenario, avvertitemi e ne faremo subito ricerca per recuperarlo e mandarvelo.

<sup>1</sup> *Extrait d'une lettre de Camille Jordan*, in PEANO 1884a, p. 47.

<sup>2</sup> La lettera di G. Peano a C. Jordan, Torino 16.2.1884, è edita in BORGATO 1991, pp. 93-95. Cfr. anche G. PEANO, [*Réponse à Ph. Gilbert*], 1884b, pp. 254-256.

<sup>3</sup> Quintino Sella (1827-1884), formatosi all'École des Mines di Parigi, docente presso la Facoltà di Scienze dell'Università e alla Scuola di Applicazione per gli ingegneri di Torino, è uno dei fondatori della cristallografia matematica. Eletto deputato nel 1861 partecipò attivamente all'attività politica del nuovo stato italiano. Cfr. F. PARLAMENTO, *Quintino Sella*, in ROERO 1999, t. II, pp. 477-482, da cui risulta che morì a Biella il 14.3.1884.

<sup>4</sup> Francesco Brioschi (1824-1897) professore di idraulica al Politecnico di Milano si occupò soprattutto di analisi, lasciando importanti contributi sulla risoluzione mediante funzioni ellittiche delle equazioni di 5° e di 6° grado. Fu presidente dell'Accademia dei Lincei dal 1884 alla morte. Cfr. C. G. Lacaita, A. Silvestri (a cura di), *Francesco Brioschi e il suo tempo (1824-1897)*, Milano, F. Angeli, 2000.

4. A. Genocchi a P. Tardy, Torino 27.4.1884, BUG, busta 12/88, cc. 1r-1v.

Carissimo Tardy,

ho ricevuto la vostra lettera di Firenze 18 Aprile e la vostra cartolina da Genova 24 aprile e vi ringrazio dell'una e dell'altra.

Ho sentito con piacere che a Genova avete trovato il volume del primo secolo della nostra Accademia ed io intendeva di far oggi i vostri ringraziamenti al Presidente Fabretti, essendovi adunanza della nostra Classe, ma il Fabretti mancava essendo trattenuto a Roma dal Consiglio Superiore.

Fate pure quanto mi accennavate delle vostre note sul Thomé: ne prenderò cognizione e vi dirò il mio parere.<sup>1</sup>

Tornando alla questione della continuità della derivata, io citai un esempio preso dal Serret d'una funzione discontinua che ha sempre un valor determinato; e voi rispondeste che quella funzione prende tre valori che non sarebbero meno di due quand'anche la funzione fosse tale da aver uguali i valori estremi.<sup>2</sup> Credo che la vostra osservazione non regga. La funzione  $\varphi(x)$  di cui si tratta prende tre valori

$$\varphi(a-h), \varphi(a), \varphi(a+h)$$

quando  $h$  sia, se si vuole, infinitesimo *ma diverso da zero*, ma questi tre valori corrispondono a tre diversi valori di  $x$

$$a-h, a, a+h;$$

se si suppone  $h=0$  si ha un solo valore  $a$  di  $x$  e un solo valore  $\varphi(a)$  della funzione. Trattandosi d'una funzione discontinua non è permesso di sostituire zero ad un valore infinitesimo.

Voi premettete che nella dimostrazione del Bonnet non solo la derivata deve aver un valor determinato per ogni valore di  $x$  ma si deve aggiungere che il valor della derivata deve rimanere lo stesso per  $x=a$  sia che  $x$  si accosti al valore  $a$  da una parte sia che vi si accosti dall'altra parte. E anche ciò non mi pare esatto. Supposta la funzione  $f(x)$ , non è la derivata  $f'(x)$  che debba tendere verso lo stesso valore quando  $x$  tende verso  $a$  da destra o da // sinistra, ma è il rapporto

<sup>1</sup> Cfr. nota 3, p. 257.

<sup>2</sup> Ecco quanto in proposito si legge nella lettera di P. Tardy a A. Genocchi, Firenze 18.3.1884, FGP, ms. EE, cc. 1v-2v: «Grazie pure di quanto mi scrivete circa la nota formola. Però è sempre qualche dubbio, e mi pare che nella dimostrazione del Bonnet non basta la condizione che la derivata abbia un valore determinato per ogni valore di  $x$  nello intervallo da  $x_0$  ad  $x_0+h$ , e che bisogna aggiungere sia che si accosti a questo valore da una parte o dall' // altra. Nell'esempio della funzione che voi portate abbiamo tre valori  $\varphi(a-o)$ ,  $\varphi(a)$ ,  $\varphi(a+o)$ . E se anche si prendesse una funzione per cui  $\varphi(a-o)$  e  $\varphi(a+o)$  fossero uguali e  $\varphi(a)$  diverso si avrebbero due valori. Erano queste considerazioni che mi facevano dire che implicitamente nella dimostrazione del Bonnet era ammessa la continuità della derivata. Forse, esaminando meglio la cosa, si potrà concludere che basta avere  $\varphi(a-o)=\varphi(a+o)$  e che  $\varphi(a)$  possa assumere un valore diverso, e quindi essere  $\varphi(x)$  discontinua per  $x=a$ ; ma non sono ancora del tutto persuaso. Aspetto vostri chiarimenti. Le osservazioni del Gilbert sono strane davvero, e quando sarò a Genova leggerò il suo articolo nelle Nouvelles Annales.»

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

che deve tendere allo stesso limite quando  $h$  tende verso zero da destra o da sinistra. Questo rapporto ha per limite la derivata ma non è la derivata, e le due cose non si possono confondere senza presupporre la continuità della derivata.

Il Peano ha mandata al Jordan la dimostrazione ch'egli ha dichiarato di aver desiderio di conoscere,<sup>1</sup> e il Jordan gli ha risposto con una lettera gentilissima ringraziandolo e assicurandolo che profitterà delle sue osservazioni nel seguito della sua opera. Vedete che linguaggio diverso da quello del Gilbert.

Qui regna un gran movimento per l'Esposizione.<sup>2</sup> Non ve ne parlo perché dai giornali saprete più di quanto io ve ne potrei dire. State sano e scrivetemi subito

Torino 27 aprile 1884

V<sup>ro</sup> Aff<sup>mo</sup>

A. Genocchi

#### RINGRAZIAMENTI

Al termine di questo lavoro desidero esprimere il mio più sentito ringraziamento alla Prof.ssa C.S. Roero, che con acume critico e generosa disponibilità ha diretto questa ricerca in tutte le sue fasi, incoraggiandomi ad esporla ed essendo prodiga di innumerevoli e preziosi suggerimenti. Sono inoltre grata al Prof. E. Giusti per le sue interessanti osservazioni e alla Prof.ssa L. Giacardi che ha messo a mia disposizione il manoscritto delle *Lezioni* di Genocchi conservato nell'Archivio privato del Prof. M.U. Dianzani.

#### BIBLIOGRAFIA

- Celebrazioni in memoria di Giuseppe Peano nel cinquantenario della morte*, Atti del Convegno organizzato dal Dipartimento di Matematica dell'Università di Torino, 27-28 ottobre 1982, Torino, Litocopisteria Valetto, 1986.
- Peano e i fondamenti della matematica*, Atti del Convegno, Modena, Accademia Nazionale di Scienze Lettere e Arti, 22-24 ottobre 1991, Modena, Mucchi, 1993.
- Allio Renata (a cura di) 2004, *Maestri dell'Ateneo torinese dal Settecento al Novecento*, Torino, Stamperia artistica nazionale.
- ASCOLI GUIDO 1955, *I motivi fondamentali dell'opera di Giuseppe Peano*, in TERRACINI 1955, pp. 23-30.
- BOGGIO TOMMASO 1933, *Giuseppe Peano*, «Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino», 681, pp. 436-446.

<sup>1</sup> Cfr. nota 2, p. 260.

<sup>2</sup> Si allude all'Esposizione Generale Italiana, inaugurata a Torino nell'aprile del 1884.

- BORGA MARCO, FREGUGLIA PAOLO, PALLADINO DARIO 1985, *I contributi fondazionali della scuola di Peano*, Milano, Franco Angeli, pp. 149-163.
- BORGATO MARIA TERESA 1991, *Alcune lettere inedite di Peano a Genocchi e a Jordan sui fondamenti dell'analisi*, in CONTE, GIACARDI 1991, pp. 61-97.
- BOTTAZZINI UMBERTO 1991, *Angelo Genocchi e i principi del calcolo*, in CONTE, GIACARDI 1991, pp. 31-60.
- BOTTAZZINI UMBERTO 1993, *Peano e la logica dei controesempi*, in *Peano e i fondamenti della matematica* 1993, pp. 237-253.
- BOURBAKI NICOLAS 1960, *Éléments d'histoire des mathématiques*, Paris, Hermann.
- CASSINA UGO 1933, *L'opera scientifica di Giuseppe Peano*, «Rendiconti del Seminario Matematico di Milano», 7, pp. 323-389.
- CASSINA UGO 1936, *Storia del concetto di limite*, «Periodico di Matematiche», s. 4, 16, pp. 144-167.
- CASSINA UGO 1950, *L'area di una superficie curva nel carteggio inedito di Genocchi con Schwarz ed Hermite*, «Rendiconti dell'Istituto Lombardo, Classe di Scienze FMN», s. 3, 83, pp. 311-328.
- CASSINA UGO 1952, *Alcune lettere e documenti inediti sul trattato di calcolo di Genocchi - Peano*, «Rendiconti dell'Istituto Lombardo, Classe di Scienze FMN», s. 3, 85, pp. 337-362.
- Conte Alberto, Giacardi Livia 1991 (a cura di), *Angelo Genocchi e i suoi interlocutori scientifici. Contributi dall'epistolario*, Torino, Deputazione Subalpina di Storia Patria («Centro di Studi per la Storia dell'Università di Torino, Studi e Fonti» IV).
- DIEUDONNÉ JEAN 1978, *Abrégé d'histoire des mathématiques 1700-1900*, Paris, Hermann.
- DUGAC PIERRE 2003, *Histoire de l'Analyse, Autour de la notion de limite et de ses voisinages*, Paris, Vuibert.
- GABBA ALBERTO 1957, *La definizione di area di una superficie curva ed un carteggio inedito di Casorati con Schwarz e Peano*, «Rendiconti dell'Istituto Lombardo, Classe di Scienze FMN», s. 3, 91, pp. 857-883.
- GARIBALDI ANTONIO CARLO 1991, *Sui rapporti tra Angelo Genocchi e Placido Tardy*, in CONTE, GIACARDI 1991, pp. 281-292.
- GHIZZETTI ALDO 1986, *I contributi di Peano all'analisi matematica*, in *Celebrazioni in memoria di Giuseppe Peano nel cinquantenario della morte* 1986, pp. 45-59.
- Giusti Enrico, Pepe Luigi 2001 (a cura di), *La Matematica in Italia 1800-1950*, Firenze, Polistampa.
- KENNEDY HUBERT 1980, *Peano. Life and Works of Giuseppe Peano*, Dordrecht, Reidel; ed. italiana *Peano. Storia di un matematico*, Torino, Boringhieri, 1983.
- KENNEDY HUBERT 2002, *Twelve Articles on Giuseppe Peano*, Peremptory Publications e-book, San Francisco.
- KLINE MORRIS 1999, *Storia del pensiero matematico*, vol. II. *Dal Settecento a oggi*, Torino, Einaudi; ed. inglese *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, New York, University Press, 1972.
- KOLMOGOROV ANDREÏ NICOLAEVICH, YUSHKEVICH ADOLPH 1996, *Mathematics of the 19<sup>th</sup> Century*, vol. II. *Geometry, Analytic Function Theory*.



- KOLMOGOROV ANDREÏ NICOLAEVICH, YUSHKEVICH ADOLPH 1998, *Mathematics of the 19<sup>th</sup> Century*, vol. III. *Constructive Function Theory, Ordinary Differential Equations, Calculus of Variations, Theory of Finite Differences*, Basel, Birkhäuser.
- LEVI BEPPO 1932, *L'opera matematica di Giuseppe Peano*, «Bollettino della Unione Matematica Italiana», 2, pp. 253-262.
- LEVI BEPPO 1955, *L'opera matematica di Giuseppe Peano*, in TERRACINI 1955, pp. 9-21.
- MICHELACCI GIACOMO 2005, *Le lettere di Charles Hermite a Angelo Genocchi (1868-1887)*, «Bollettino di Storia delle Scienze Matematiche», 25, pp. 1-270.
- PEANO GIUSEPPE 2002, *L'Opera Omnia di Giuseppe Peano*, a cura di Clara Silvia Roero, cd-rom n. 2, Torino, Dipartimento di Matematica.
- PRINGSHEIM ALFRED 1898, *Grundlagen der allgemeinen Funktionenlehre*, Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften, Leipzig, Teubner, 2, A1, pp. 1-53.
- RICCI GIOVANNI 1939, *Analisi*, in SILLA 1939, pp. 55-124.
- ROERO CLARA SILVIA 1999 (a cura di), *La Facoltà di Scienze Matematiche Fisiche Naturali di Torino, 1848-1998*, t. I. *Ricerca, Insegnamento, Collezioni Scientifiche*, t. II. *I Docenti*, Torino, Deputazione Subalpina di Storia Patria («Centro di Studi per la Storia dell'Università di Torino, Studi e Fonti», IX-X).
- ROERO CLARA SILVIA 2004, *Giuseppe Peano, geniale matematico, amorevole maestro*, in Allio 2004, pp. 138-144.
- SILLA LUCIO 1939 (a cura di), *Un Secolo di Progresso Scientifico Italiano 1839-1939*, vol. I, Roma, Società Italiana per il Progresso delle Scienze.
- TERRACINI ALESSANDRO 1955 (a cura di), *In memoria di Giuseppe Peano*, Cuneo, Liceo Scientifico.
- TRICOMI FRANCESCO 1968-1969, *Uno Sguardo allo Sviluppo della Matematica in Italia nel Primo Secolo dello Stato Unitario*, «Rendiconti del Seminario Matematico dell'Università e del Politecnico di Torino», 28, pp. 63-76.
- VIOLA TULLIO 1983, *Il contributo dell'Accademia ai progressi dell'analisi matematica*, in *I due primi secoli dell'Accademia delle Scienze di Torino*, Atti del Congresso, Torino, 10-12.11.1983, Torino, Accademia delle Scienze, 1986, pp. 11-45.
- VOSS AUREL 1898, *Differential-und-Integralrechnung*, Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften, Leipzig, Teubner, 2, A1, pp. 54-134.
- ZERNER MARTIN 1986, *Sur l'analyse des traités d'analyse: les fondements du calcul différentiel dans les traités français, 1870-1914*, «Cahier de Didactique des Mathématiques», Université Paris VII (IREM), 30, pp. 1-25.
- ZERNER MARTIN 1994, *La transformation des traités français d'analyse (1870-1914)*, Université de Nice-Sophia-Antipolis, U.R.A. au C.N.R.S. n° 168, Laboratoire J.-A. Dieudonné, Prépublication n° 389, pp. 1-82.

*Pervenuto in redazione il 26 gennaio 2007*